

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 19

ΕΜΒΑΔΟΝ

ΧΩΡΙΟΥ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = x^2 + 3x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και C_g .
12. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από:
- α. Τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .
- β. Τις C_f , C_g και τις ευθείες: i) $x = 2$, $x = 3$ ii) $x = -1$, $x = 3$.
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$.
- α. Να βρείτε την εφαπτομένη ϵ της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$.
- β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία ϵ και τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - x^2$. Να βρείτε την τιμή του a , ώστε το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = 2$, να χωρίζεται από την ευθεία $y = 4 - a^2$, $0 < a < \sqrt{2}$, σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
16. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, την εφαπτομένη ϵ της C_f στο $x_0 = 0$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την πλάγια ασύμπτωτή της στο $+\infty$ και την ευθεία $x = 2$.
18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να βρείτε το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, την εφαπτομένη ευθεία ϵ της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και την ευθεία $x = -1$.
19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$.
- α. Να βρείτε τις εφαπτομένες της C_f που διέρχονται από το σημείο $A(1, 2)$.
- β. Αν O, B τα κοινά σημεία της C_f με τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι η C_f χωρίζει το τρίγωνο AOB σε δύο χωρία που ο λόγος των εμβαδών τους είναι 2.
20. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ με $x > 0$, $g(x) = \sqrt{x}$ με $x \geq 0$ και $h(x) = \frac{3x - 4}{4}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f , C_g και C_h .
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη C_f και την ευθεία $y = 4$. Να βρείτε οριζόντια ευθεία $y = \lambda^2$, $\lambda > 0$ που να χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^3 - 9x^2 + 13x - 5}{x^2 - 3x + 2}$

α. Να βρείτε την ασύμπτωτη ευθεία ε της C_f στο $+\infty$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ευθεία ε και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 3$ και $x = \lambda$, όπου $\lambda > 3$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} .

β. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = e$.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 + x$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \sin x$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $[-1, \pi + 1]$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = \pi + 1$.

γ. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των C_f και $C_{f^{-1}}$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 - \frac{e^x}{1 + e^x}$.

α. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , την ε , τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \alpha$, $\alpha < 0$.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} E(\alpha)$.

δ. Αν το α ελαττώνεται με ρυθμό 2 μον/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $E(\alpha)$ τη χρονική στιγμή που είναι $\alpha = -\ln 2$.

27. Έστω $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι

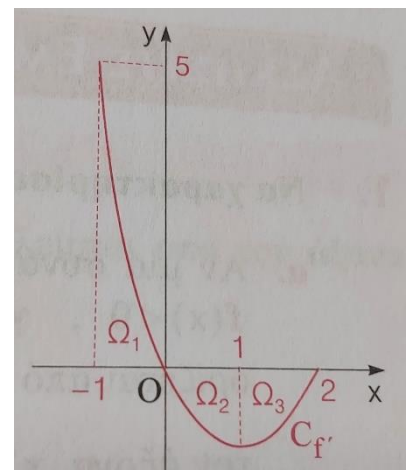
παραγωγίσιμη με συνεχής παράγωγο και η γραφική παράσταση της f' φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν ισχύουν $f(-1) = 0$ και $E(\Omega_1) = 2E(\Omega_2) = 2E(\Omega_3) = 2$.

α. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της f

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\eta\mu(x+1)}{f(x)}$



28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$, $x \in \mathbb{R}$

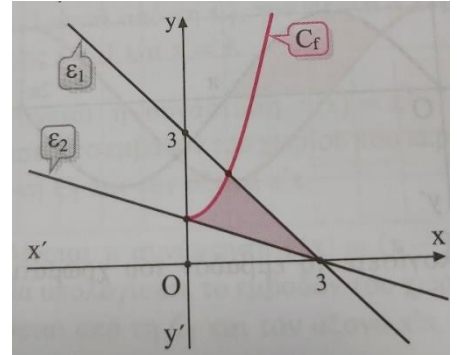
α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε το σημείο καμπής της C_f .

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ και την ευθεία $x = 1$.

29. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$, $x \geq 0$.

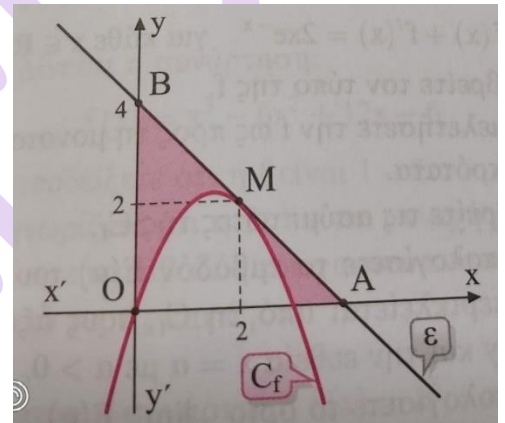
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τις ευθείες ε_1 και ε_2 .



30. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ και η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο της M

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$, $\beta = 3$ και $\gamma = 0$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χρωματισμένου χωρίου.



31. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $O(0, 0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

δ. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

32. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2 + (x - 2)^2$, $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

δ. να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_f και $C_{f^{-1}}$.

33. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} a + e^x, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$ με $a \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό a , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει $\alpha = -1$, τότε:

- i) να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$,
- ii) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f ,
- iii) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

34. Δίνεται συνάρτηση f , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = -x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.

α. Να βρείτε τον τύπο της f .

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση $x = \alpha$ με $\alpha \in (0, 1)$.

δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f και τους άξονες $x'x$ και

$$y'y \text{ είναι ίσο με } 1 - 1 - \frac{\alpha^2}{2}.$$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x - 1$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1} = e^{2022}$ με $x > 0$, έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

γ. Αν x_1, x_2 , με $x_1 < x_2$, είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (β), να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 2021$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) + 1$, με $x > 0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$ και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες ευθείες ε_1 και ε_2 της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.

β. Αν $\varepsilon_1: y = -x$ και $\varepsilon_2: y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος (α), να σχεδιάσετε τις ε_1 και ε_2 και

τη γραφική παράσταση της f και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$

37. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο διπλανό σχήμα
- $f(0) = 2$ και $f(1) = 0$,
- το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x = 0$ και $x = 3$ ισούται με 8 τ.μ.
- η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$, $f(2) = -2$ και να υπολογίσετε, αν

$$\text{υπάρχουν, τα όρια } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x) - 2},$$

δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

β. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα,

κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f .

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2, 3)$ για το οποίο δεν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

δ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

38. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2) + ax + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\epsilon: y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την ευθεία ϵ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

γ. i) Να αποδείξετε ότι $f'(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $f\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \lambda \geq (\lambda - 1)\ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) + \frac{3}{2}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

δ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^3 - x + 2$, $x \in \mathbb{R}$, έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη και να βρείτε την εξίσωσή της.

39. Δίνεται συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(1) = -\frac{1}{6}$

$$\text{και } \int_0^1 (f'(x))^2 dx \leq 2 \int_0^1 f(x) dx$$

α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^1 (f'(x) + x)^2 dx$.

β. Να βρείτε τον τύπο της f .

γ. Θεωρούμε τα σημεία $A(0, f(1))$ και $B(0, f(0))$. Ένα σημείο M κινείται στην γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 16 μονάδες/sec. Τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι $\frac{1}{2}$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τα ευθύγραμμα τμήματα AB και AM .

