

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

A. Βασικές Ασκήσεις στα Όρια

1. Να υπολογίσετε τα όρια

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 4x^2 + x - 6}{x^2 - 2x - 8}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{4x}{x^2 - 4} \right)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{x-2}{x^2 - x} \right)$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2+x}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-3x+1}{x^2-1}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{5-x}}{\sqrt{2x-1}-1}$$

$$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{5-x}-1}{x^2-1}$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^3-x-1|-|x-7|}{x^2-4}$$

$$\iota\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2-4|-x+2}{x^2-2x}$$

$$\iota\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right)$$

$$\iota\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(x^2 + x \right) \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \right]$$

$$\iota\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x}$$

$$\iota\zeta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\epsilon\phi x}{x}$$

$$\iota\eta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\eta\mu x}$$

$$\iota\theta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$\kappa. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta\mu x}{x}$$

$$\kappa\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi - x)}{x^2 + x}$$

$$\kappa\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x + 3x}{2x - \eta\mu x}$$

$$\kappa\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

$$\kappa\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x}{x^2 + x}$$

$$\kappa\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$$

$$\kappa\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2+\epsilon\phi x}{x+5\eta\mu x}$$

$$\kappa\zeta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{x}$$

$$\kappa\eta. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\eta\mu x}{\pi - x}$$

$$\kappa\theta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x^2}{\eta\mu 3x}$$

$$\lambda. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\pi - 2x}$$

$$\lambda\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x}-1}{x^2-\sqrt{x}}$$

$$\lambda\beta. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x-2, & 0 < x \leq 1 \\ 3x-4, & 1 < x < 2 \\ 2x-1, & x > 2 \end{cases}$

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4}, & x \neq 2 \\ a, & x = 2 \end{cases}$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β. Βρείτε το a , ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x}{\sqrt{x+5} - 2}, & \alpha \nu \quad -5 \leq x < -1 \\ \alpha x + a - 7, & \alpha \nu \quad -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}, & \alpha \nu \quad x > 2 \end{cases}$

για την οποία υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

α. Να αποδείξετε ότι $a = 3$

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

5. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2x\sqrt{x} \leq f(x) \leq x^2 + x$ για κάθε $x > 0$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1}$

6. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\left| \frac{f(x) - 3x}{x - 1} \right| \leq x^2 + 1$ για κάθε $x \neq 1$.

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

7. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 4} = 3$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν), τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x^2 - 3x}{\sqrt{x+2} - 2}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - 2}{x - 1}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(2x) - 2|}{x^2 - 1}$

8. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία:

α. Αν ισχύει $3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

β. Αν ισχύει $|f(x) - 2| \leq x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

γ. Αν ισχύει $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x))$

9. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, όταν ισχύει $2x - 3x^2 \leq f(x) \leq x^4 + 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

10. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2\eta\mu f(x)}{f(x) + 1 - \sigma\upsilon\nu f(x)}$

11. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = 2$.

Να βρείτε το όριο: $\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x) - 1}{x}$ $\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(2x)}{x}$

12. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h} = 2$.

Να βρείτε τα όρια: $\alpha. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - 1}{h}$ $\beta. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$

13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν: $\alpha. \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x^2 + 3x) = 3$ και

$x_0 = 3$. $\beta. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 3$ και $x_0 = 2$ $\gamma. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + \eta\mu x}{x} = 2$ και $x_0 = 0$

14. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

$\alpha.$ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. $\beta.$ Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + xf(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + x^2 + \eta\mu^2 x}$

15. Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 + 2x} = 3$, βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

16. Να υπολογίσετε τα όρια: $\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ $\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$

B. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στα Όρια

17. Να υπολογίσετε τα όρια:

$\alpha. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - x}{x^2 - 9}$

$\beta. \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x}{4x^2 - 1}$

$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x}$

$\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^3 - 1}$

$\epsilon. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$

$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - x}{x - 3 + \frac{2}{x}}$

$\zeta. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

$\eta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$

$\theta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{11}}{x^2 - 5x + 6}$

$\iota. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} + 2x}{x^2 - 1}$

$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2x+3}}$

$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}\sqrt{2x+5} + 1}{x^2 - 2x}$

$$\iota\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1| - |x-3|}{x^2 - 4}$$

$$\iota\delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1| + x^2 - 2x + 1}{x^5 - 1}$$

$$\iota\epsilon. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2| + x^2 - 4}{|x-5| - 3}$$

$$\iota\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2}{x} \right)$$

$$\iota\zeta. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$\iota\eta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sigma\upsilon\nu x}{x}$$

$$\iota\theta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \sigma\upsilon\nu x} \right)$$

$$\kappa. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$$

$$\kappa\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\eta\mu x} \eta\mu \left(1 - \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$\kappa\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\eta\mu x|}{x}$$

$$\kappa\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 5x}{x^2}$$

$$\kappa\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\varepsilon\varphi 5x}$$

$$\kappa\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(\eta\mu x)}{\eta\mu x}$$

$$\kappa\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - \sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$$

18. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 3$.

Να βρείτε το όριο:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - 2}{x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x) - f(3x)}{x}$$

19. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 3$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x^2 - x) - 1}{x - 2}$

20. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^2(x) + x\eta\mu x}{f^2(x) + x \cdot f(x)}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^3 + x)}{x}$$

21. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3$ και $|g(x) - 1| \leq |f(x)|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|g(x) - 3| - 2}{g^2(x) - g(x)}$$

22. Έστω $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 + x, \text{ για κάθε } x \in (-\pi, \pi). \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + f(x)}{2x - f(x)}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + \sqrt{x^2 + 1} - 1}{\eta\mu^2 x}$$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1}, & \alpha\nu \quad x < -1 \\ \kappa x + \mu, & \alpha\nu \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{x - \sqrt{2 - x}}{x - \sqrt{x}}, & \alpha\nu \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$ Βρείτε τις τιμές των $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$,

ώστε να υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

$$24. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 - (2\alpha - 3)x - 6}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}, & x \neq 2 \\ \frac{\alpha^2 + 18}{2}, & x = 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

25. Δίνεται περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 2} f(x+3) = 4$. Να υπολογίσετε τα

όρια: $\alpha. \lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ $\beta. \lim_{x \rightarrow 1} (f(x-6) + f(2-7x))$

26. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2020}{x - 3} = 2021$. Να υπολογίσετε

το όριο: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2020}{x + 3}$.

27. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y) - 2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$

$\alpha.$ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} (f(x) - f(3))$

$\beta.$ Να αποδείξετε ότι $f(2x) = 2f(x) - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\gamma.$ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

28. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(x^3 - 1)f(x) \leq x^2 + 7x - 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

$\alpha.$ Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$.

$\beta.$ Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 3f(x) - 1 + |f(x) - 4|}{\sqrt{f(x) + 1} - 2}$

29. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|xf(x) - 2f(x) - x^2 + \alpha| \leq x^2 - 4x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\alpha.$ Να αποδείξετε ότι $\alpha = 4$.

$\beta.$ Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

$\gamma.$ Αν επιπλέον ισχύει $f^2(x) \neq 16$ κοντά στο 2, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{3f(x) + 4}}{f^2(x) - 16}$

30. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \neq 0$ κοντά στο 0 και:

$f^2(x) - 2xf(x) \leq \eta\mu^2 x - 2x\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ $\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(5x)}{x^2}$ $\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu f(x)}{x}$ $\delta. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(\eta\mu x)}{\pi - x}$

31. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = 4$. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + x - 4}{|x - 3| - 1}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 f(x) - 2| - |1 - 4f(x)| + \sqrt{x - 1}}{x^2 - 2x}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 2f(x) - 8}{\sqrt{f^2(x) + 6x} - 2x}$

32. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ , ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + \lambda x + \mu}{x^2 + 3x + 2} = 5$

33. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β , ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x + \alpha\sqrt{x+4} + \beta}{\eta\mu 5x} = 1$

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \gamma}{\sqrt{x+3} - 2}, & \text{αν } -3 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 3x + 2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α , β και γ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

35. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ και $g(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

α. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$

β. Να εξετάσετε αν η g είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση.

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \left[(g \circ f)(x) \left(\sqrt{2-x} + \frac{g(2020)}{g(-2020)} \right) \right]$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f^{-1}(x))$

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{f^{-1}(x)}{\sqrt{4x+6} - 2}$

38. Αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(f(x) + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2 - 1} \right)$$