

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΤΟ x_0

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

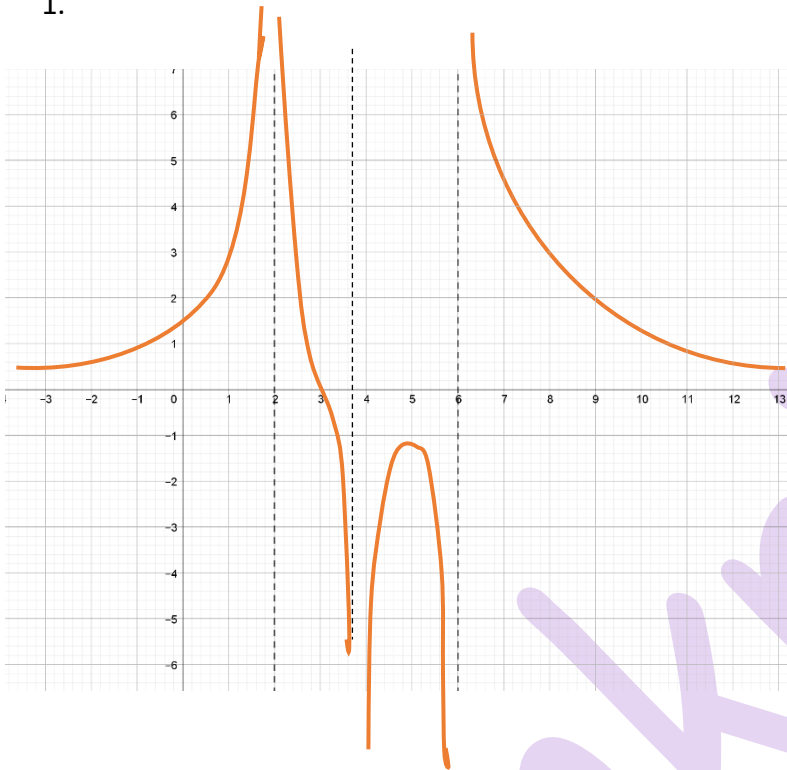
1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στα Μη Πεπερασμένα Όρια στο x_0

1.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

γ. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$

δ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

στ. $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[5]{f(x)}$

ζ. $\lim_{x \rightarrow 4} |f(x)|$



2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε τα παρακάτω όρια, εφόσον υπάρχουν.

α. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} |f(x)|$,

$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} |f(x)|$ και

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x)}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} |f(x)|$ και

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{f(x)}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x) - 3}$

στ. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{f(x)}$

3. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{x-2}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+\sqrt{x}}{x}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x^2-1}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4x+4}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^3-6x^2+9x}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-6}{x^2-x-2}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{\sqrt{1-x}+16}{x^2+2x-3} \right)$$

$$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{5-x}-1}{x^2-1}$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x-3}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\iota\gamma. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{|2-x|-3}{|2x-9|-|4x-x^2|}$$

$$\iota\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x^3}$$

$$\iota\epsilon. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-4x}{(\sqrt{x}-2)^3}$$

4. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \lambda x + \lambda}{(x-2)^2}$.

5. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, για την οποία το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x - 2}{x^2 - x}$ είναι πραγματικός αριθμός.

6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + \lambda x + \lambda + 5}{x^2 - 4x + 4}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

7. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^2 + \lambda x - \lambda + 3} = -\infty$, να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + \alpha}{x^2 - 4}$ υπάρχει, να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο.

9. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = -3$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν), τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{f(x)}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{f(x)\eta\mu^2 x}$$

10. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(x) \leq x - \frac{1}{x}$, για κάθε $x > 0$.

Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)-3|}{f^2(x)-3f(x)}$$

11. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $|x-2|f(x) \geq x-1$ για κάθε $x \neq 2$. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{f(x)}$$

12. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$.

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|3 - xf(x)| - |2f(x) - 3|}$

13. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 3f(x) - 5}{f^2(x) + f(x) - 4}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 2f(x) + 3}{f^2(x) - 3f(x) - 1}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4}{f^3(x) - 2f^2(x) + 1}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{4f^2(x) - 3f(x) + 2} + f(x) \right)$

ε. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\sqrt{f^2(x) - 2f(x) + 3} + f(x) \right)$

14. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $(x^2 - 4x + 4)f(x) \leq x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{2\}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

15. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα παρακάτω όρια: α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + 2}{|\eta\mu x| - |x|}$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{x} \right)$

Β. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στα Μη Πεπερασμένα Όρια στο x_0

16. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 7}{|x - 2|}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x^3 + 4} - 2}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 9} - 3}{\sqrt{x^3 + 1} - 1}$

δ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + \eta\mu x} - 2}{x^3}$

ε. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2|x|}{x^2}$

στ. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x - 3}{\eta\mu x - 1}$

ζ. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x - 7}{|x - 2|} - \frac{x - 3}{x - 2} \right)$

η. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varepsilon\varphi x$

θ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 + \sqrt{x}}{x}$

17. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$, όταν $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1}, & \alpha\nu \quad x < 1 \\ \frac{2-x}{x^3-1}, & \alpha\nu \quad x > 1 \end{cases}$

18. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε:

α. το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν $f(x) = \frac{2x^2 - \lambda x - \lambda}{(x-1)^2}$

β. το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, όταν $f(x) = \frac{x^2 - 2\lambda x + \lambda^2}{x^2 - 4x + 4}$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\lambda - 2)x^2 + \lambda x - 4}{x^2 - 4}$. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός.

20. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 4}{x^2 - 4x + 4}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

21. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 f(x) = -3 \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = -\infty \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3}{f(x)} = +\infty$$

22. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x^2 - 4)}{x - 1} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{g(x)(x - 2)} = +\infty. \quad \text{Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

23. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{3f(x) + 1} = -\infty$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

24. Να βρείτε τα όρια: $\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\eta \mu^2 x - x^2} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|} \right) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| - x}$

25. Να βρείτε για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 + \alpha}{x^2 - 4x + \alpha^2} = +\infty$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+5}{\alpha x^2 + \beta x - 3}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$. Να βρείτε τις τιμές των α και β .

27. Δίνεται άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\alpha.$ Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{\sin(x+2) - 1}$

$\beta.$ Αν ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3x}{x - 1} = +\infty$, να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + 3x}{x^2 - 1}$

28. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 3$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \eta \mu x \cdot \eta \mu 3x) \quad \gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2020 f(x)}{f^2(x) - 3f(x) + 13}$$

29. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(x)}{\sqrt{x+4} - 2} = -3$

A. να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{f(x)} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) + \eta \mu \frac{1}{x} \right) \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(f(x) \cdot \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right)$$

Β. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) - h(x) - 2g(x) = g^2(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

30. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 f(x) \geq x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

υπολογίσετε τα όρια: α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{f(x)}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \left((f(x) - 2020) \eta\mu \frac{1}{f(x)} \right)$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1}

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{f^{-1}(x)}$

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - f^{-1}(x)}$

32. Δίνεται η συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με: $g(x) = \sqrt{x+a} - \beta$ και $\alpha, \beta > 0$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x^2 - 2x} = -\frac{1}{8}$$

α. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta\mu 3x}{g(x)} = 20$.

Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f \circ f)(\eta\mu x)}{x^3}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(2x)}{x^3}$