

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ - ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στην Παράγωγο Συνάρτησης

1. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 .

α. $f(x) = x^2 - 3x + 5, x_0 = 2$

β. $f(x) = 1 + \eta\mu x, x_0 = 0$

γ. $f(x) = \sqrt{x-1}, x_0 = 1$

δ. $f(x) = x + 1 - x\eta\mu|x|, x_0 = 0$

ε. $f(x) = x^2 + 1, x_0 = 1$

στ. $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 1$

ζ. $f(x) = x^2 + |x-3|, x_0 = 3$

η. $f(x) = x|x|, x_0 = 0$

2. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων στο x_0 .

α. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

β. $f(x) = \begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

γ. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x + 2, & x < 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x \geq 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$

δ. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

3. Αν $x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την $\frac{df(0)}{dx}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $x^2 + 3x \leq f(x) \leq 2x^2 - x + 4$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να υπολογίσετε την $f'(2)$.

5. Αν $x + 2 \leq f(x) \leq x^2 + x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

α. $f(0) = 2$

β. $\frac{df(0)}{dx} = 1$

6. Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(3+h) = 2 + h^2 + \eta\mu h$, (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $f(3) = 2$ και να βρείτε την $f'(3)$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu^2 x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

8. Αφού μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 , τις παρακάτω συναρτήσεις, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμες στο σημείο αυτό.

α. $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$

β. $f(x) = |x-1| + 3x - 2, x_0 = 1$

9. Να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$, οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$

α. $f(x) = \begin{cases} ax^3 + 1, & x \leq 1 \\ bx + 3, & x > 1 \end{cases}$

β. $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x > 1 \\ 2x^2 - ax + 3a + 1, & x \leq 1 \end{cases}$

10. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} = \frac{7}{8}$.

Να υπολογίσετε: α. το $f(1)$ β. το $f'(1)$

11. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των

αξόνων και ισχύει ότι $f'(0) = 2$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{\sqrt{x+4} - 2}$

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμες στο 1, για τις οποίες ισχύουν: $f(1) = g(1)$, $g'(1) = 2020$ και $f(x) \leq g(x) + x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την $f'(1)$.

13. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 3. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση

των $f(3)$ και $f'(3)$ το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - xf(3)}{x - 3}$

14. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$ β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2 - 1}$ γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x) - 2}{x - 1}$

15. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = 0$ και $f'(3) = 5$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2x-1)}{x-2}$

16. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f'(0) = 5$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)\eta\mu x - f(x^2) - (\eta\mu x - 1)f(0)}{x\eta\mu x}$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x) - f(x)}{x}$

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν $g'(0) = 4$ και:

$f(3+h) = h^3 + 2h^2 + 3h + g(h)$ για κάθε $h \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 και να υπολογίσετε την $f'(3)$.

18. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 2 με $f'(2) = 6$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h}$ β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h}$ γ. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2+3h)}{h}$

19. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{h} = 2f'(1)$ β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} = 2f'(1)$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[xf\left(1 + \frac{1}{x}\right) \right] = f'(1)$, αν $f(1) = 0$

20. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο 1. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$, όταν:

α. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 4$ β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - 2}{h} = 8$ γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[xf\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2x \right] = 4$

21. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + f(x) + 1 = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ β. $f'(1) = 3$ γ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x^2 - x)}{x - 1}$

22. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
23. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 4$ για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy - 2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
24. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο 1, για την οποία ισχύει:
 $f(x) + f(4-3x) = 10x^2 - 26x + 20$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την $f'(1)$
25. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής στο 0, για την οποία ισχύει:
 $f^3(x) + 3x^2 f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
 β. Η f είναι συνεχής στο 1.
 γ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.
26. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(a) < 0 < f'(\beta)$. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο (a, β) .

Β. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στην Παράγωγο Συνάρτησης

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 1, & x \leq 1 \\ 2x^2, & x > 1 \end{cases}$ η οποία είναι συνεχής στο 1.
 α. Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$. β. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.
28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$
 α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να υπολογίσετε την $f'(0)$.
 β. Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f(x) - 2x^2}$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x^2}{x + 3}$
29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύουν τα εξής:
 - $f(2) + g(2) = 1$
 - $g(x) + xf(x) = x^2 - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 - η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 με $f'(2) = 3$
 α. Να αποδείξετε ότι $f(2) = 1$ και $g(2) = 0$
 β. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να υπολογίσετε την $g'(2)$
30. Δίνεται περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και άρτια συνάρτηση $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο 2, με $f'(2) = 3$ και $g'(2) = 5$
 α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = 2f(x) - 7g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο -2 και να υπολογίσετε το $h'(-2)$.

β. Αν γνωρίζετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 , να υπολογίσετε την $g'(0)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \beta x + \gamma, & x < 1 \\ 3x^2 + \delta x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 4$

32. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf(x) = \eta\mu^2 x + \alpha x^2 + 5x$, $x \in \mathbb{R}$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 3$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\alpha = 2$

β. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-3, -2)$.

33. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|f(x) - 1| \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να υπολογίσετε την $f'(0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y = -7x + 10$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, 2)$.

34. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 3 με $f'(3) = 5$. Επιπλέον ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να υπολογίσετε την $f'(0)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

35. Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(xy) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$.

Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο 3 με $f'(3) = \frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι:

α. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ για κάθε $x, y > 0$.

β. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 .

γ. Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0 \in (0, +\infty)$.

36. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$

α. Να αποδείξετε ότι: i). $f(0) = 0$ ii). $f'(0) = 1$

β. να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$.

37. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(2) = 3$ και $f'(2) = 4$. Να υπολογίσετε τα

όρια: α). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 2x}$ β). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 9}{x^2 - 4}$ γ). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1 - x^2}{x - 2}$ δ). $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+7}}{x^2 - 3x + 2}$

38. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2-x) - 4}{x^2 + 3x} = -1$

α. Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να υπολογίσετε την $f'(2)$

γ. Να υπολογίσετε τα όρια: i). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x) - \sqrt{4x+12}}{x^2 - 1}$ ii). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2+3x) - 4}{\eta \mu x}$

δ. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 2, για την οποία ισχύει ότι $g'(2) = \frac{3}{4}g(2)$. Να

υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(2)f(x) - 4g(x)}{x - 2}$.

39. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h} = 3f'(2)$ β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} = 2f'(2)$

γ. $\lim_{h \rightarrow +\infty} \left[\frac{h^3 + h}{h^2 + 1} \left(f\left(2 + \frac{1}{h}\right) - f(2) \right) \right] = f'(2)$

40. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f''(1) = 2$.

α. Αν επιπλέον $f'(1) = 0$ να υπολογίσετε τα όρια: i). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x - 1}$ ii). $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+2h)}{h}$

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1-h)}{h}$.

41. Αν $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + \beta}{x - 1}, & x < 1 \\ \beta x^2 + \gamma, & x \geq 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ για τις οποίες η f είναι

παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

42. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$, για την οποία ισχύει:

$x^2 f^2(x) + 2x \sin x \cdot f(x) = \eta \mu^2 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $xf(x) = 1 - \sin x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

γ. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

δ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ε. Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $\epsilon: y = 2x - 1$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

Γ. Βασικές Ασκήσεις στους Κανόνες Παραγωγής

43. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + 1$$

$$\beta. f(x) = \ln x + \sqrt{x} + a^3 - \eta\mu x$$

$$\gamma. f(x) = e^x + x + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\delta. f(x) = x^3 + \eta\mu x + \ln 2$$

$$\epsilon. f(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$$

$$\sigma\tau. f(x) = \frac{3}{4}x^4 - a \ln x - \beta$$

$$\zeta. f(x) = \sqrt{x} \cdot \eta\mu x$$

$$\eta. f(x) = x^3(2x^2 - 5)$$

$$\theta. f(x) = 3x^2 \ln x$$

$$\iota. f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x$$

$$\iota\alpha. f(x) = \ln \frac{e^x}{x} + \ln \frac{1}{x} + e^{\ln x}$$

$$\iota\beta. f(x) = x e^x \eta\mu x$$

$$\iota\gamma. f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

$$\iota\delta. f(x) = 2x^4 \ln x - e^x \sigma\upsilon\nu x$$

$$\iota\epsilon. f(x) = \frac{x^2 \ln x}{e^x}$$

$$\iota\sigma\tau. f(x) = \frac{\ln x}{x}$$

$$\iota\zeta. f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$\iota\eta. f(x) = \frac{x}{e^x}$$

$$\iota\theta. f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\kappa. f(x) = \varepsilon\phi x - x$$

$$\kappa\alpha. f(x) = \frac{1}{2 \ln x}$$

$$\kappa\beta. f(x) = \begin{cases} 3x - \eta\mu x - 4, & x \geq 0 \\ x^3 + 2x - 4, & x < 0 \end{cases}$$

$$\kappa\gamma. f(x) = 3x^2 + |x - 1|$$

$$\kappa\delta. f(x) = e^{-2x}$$

$$\kappa\epsilon. f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$\kappa\sigma\tau. f(x) = 2\sqrt{\ln x}$$

$$\kappa\zeta. f(x) = \frac{\ln|x|}{2^x}$$

$$\kappa\eta. f(x) = x^{\frac{5}{3}}$$

$$\kappa\theta. f(x) = x^{\frac{3}{5}}$$

$$\lambda. f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\lambda\alpha. f(x) = (x^2 - 2)^3$$

$$\lambda\beta. f(x) = \eta\mu^3 x$$

$$\lambda\gamma. f(x) = \eta\mu^2 3x$$

$$\lambda\delta. f(x) = \ln^2(x^2 + 2)$$

$$\lambda\epsilon. f(x) = \sqrt[4]{x^5}$$

$$\lambda\sigma\tau. f(x) = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\lambda\zeta. f(x) = \sqrt[7]{(x-2)^5}$$

$$\lambda\eta. f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^4}$$

$$\lambda\theta. f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

$$\mu. f(x) = x^{\eta\mu x}$$

$$\mu\alpha. f(x) = x^{\ln x}$$

$$\mu\beta. f(x) = x^x$$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε την f'' .

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{e^x}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f''(x) + f^{(3)}(x) = 2f(x).$$

46. Να βρείτε μη σταθερό πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει $P''(2020) + P(1) = 2$ και

$$(P'(x))^2 = 4P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

47. Δίνεται άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f'(1) = 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 0$.

β. Αν δίνεται ότι $g(x) = f(x^2 + x) + x^2 f(x)$, να υπολογίσετε την $g'(-1)$.

48. Έστω $x, y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις με μεταβλητή τον χρόνο t , οι οποίες είναι παραγωγίσιμες. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α. $f(t) = t^2 + x(t)y(t)$

β. $f(t) = \ln x(t) + x^2(t)$

γ. $f(t) = \varepsilon \varphi \theta(t)$

49. Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $x, y : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με μεταβλητή τον χρόνο t , για τις οποίες ισχύει $y^2(t) = 3 + x^2(t)$, για κάθε $t \in [0, +\infty)$. Αν τη χρονική στιγμή $t_0 = 1$ είναι $x(1) = 1$, $x'(1) = 4$ και $y(1) > 0$, βρείτε το $y'(1)$.

50. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$ δευτέρου βαθμού, για το οποίο ισχύουν $f(0) = 1$, $f'(2) = 7$, $f''(2016) = 6$.

51. Να βρείτε πολυώνυμο $P(x)$, για το οποίο ισχύουν: $P(0) = 4$ και $8P(x) = (P'(x))^2 \cdot P''(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

52. Α. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 3xf(x) = x^3 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Β. Αλλάζει κάτι αν η εκφώνηση ξεκινάει με: «Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ για την οποία ισχύει ...»;

53. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(xy) = f(x) + f(y) + x^2 y^2 - x^2 - y^2 \text{ για κάθε } x, y > 0. \text{ Να αποδείξετε ότι για κάθε } x, y > 0 \text{ ισχύει: } xf'(x) - yf'(y) = 2(x^2 - y^2).$$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{99} + x^{98} + \eta \mu(x^3 - 1)$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 2}{h}$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - 2}{x - 1}$

55. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι:

α. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah) - f(x)}{h} = af'(x), \quad a \in \mathbb{R}^*.$

β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = 2f'(x)$

56. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

β. Να δείξετε ότι $f'(x) < 1$.

57. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν $f'(0) = 1$ και $f(x) \cdot f'(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι παράγωγος της συνάρτησης f είναι συνεχής.

β. Να δείξετε ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Αν $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $g'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

58. Έστω $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\Delta) \subseteq \Delta$, για την οποία ορίζεται η συνάρτηση

$f^{-1} : f(\Delta) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$, $x \in \Delta$. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\Delta)$, να δείξετε ότι:

$$\alpha). (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \quad x \in f(\Delta) \quad \beta). (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}, \quad x \in \Delta$$

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

γ. να δείξετε ότι η f^{-1} δεν παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x, x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} .

β. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, να βρείτε την $(f^{-1})'(1)$

61. Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ μια $1-1$ συνάρτηση, όπου Δ διάστημα, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

$f'(x_0) \neq 0$. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο

$$f(x_0) \text{ και ισχύει ότι: } (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 3 και να υπολογίσετε την $(f^{-1})'(3)$.

63. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f(x \cdot y) = yf(x) + xf(y), \quad x, y > 0. \text{ Να δείξετε ότι } f'(x) = \frac{f(x)}{x} + f'(1), \quad x > 0$$

Δ. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στους Κανόνες Παραγωγίσιμης

64. Να υπολογίσετε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\beta. f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{e^x}$$

$$\delta. f(x) = \frac{x \ln x}{x - 1}$$

$$\epsilon. f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \frac{x^2 - 2}{x - 1}$$

$$\zeta. f(x) = \ln \frac{x}{1 - x}$$

$$\eta. f(x) = \ln(1 + e^{-x})$$

$$\theta. f(x) = x^2 \sqrt{1 + x^2}$$

$$\iota. f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\iota\alpha. f(x) = \frac{x}{\ln^2 x}$$

$$\iota\beta. f(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\iota\gamma. f(x) = \ln^2(x^2 + 1)$$

$$\iota\delta. f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\iota\epsilon. f(x) = x^{\frac{4}{5}}$$

$$\text{ιστ. } f(x) = (x-1)^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{ιζ. } f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

$$\text{ιη. } f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$\text{ιθ. } f(x) = \begin{cases} e^x \eta \mu x & , \quad x \leq 0 \\ x + \sigma \upsilon \nu x - 4, & x > 0 \end{cases}$$

$$\text{κ. } f(x) = \begin{cases} x \eta \mu x, & x \leq 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$$

65. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι:

$$\alpha. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-2h)}{h} = 2f''(x)$$

$$\beta. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h^2) - f'(x)}{h} = 0$$

66. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν:

$$- \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = -3$$

$$- (f^2(x))' \neq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

β. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' .

67. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει: $f(x) = -e^{-f(x)} = x - 1, x \in \mathbb{R}$

α. Να εκφράσετε την f' ως συνάρτηση της f .

β. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ. Αν $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f'(x) > \frac{1}{2}$

68. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + 1$

α. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την $(f^{-1})'(2)$.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^3 x$

α. Να λύσετε την ανίσωση $f''(x) < 0$.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{xf''(x)}$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = -2020$.

δ. Αν $g(x) = e^{x^2+x}$, να βρείτε τις: i). $(f \circ g)'(x)$ ii). $f'(g(x))$

70. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} + x$ και $g(x) = \sqrt{x} + \eta \mu x$

α. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων f και g .

β. i). Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = fg$.

ii). Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης h .

iii). Να εξετάσετε αν η h' είναι συνεχής.

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

δ. να ορίσετε τις συναρτήσεις f^{-1} και $(f^{-1})'$

71. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχής πρώτη παράγωγο και $f(x) \neq -2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, για

την οποία ισχύει: $f^2(x) - f(x^2) = 4x^3 + 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f(-1) \neq 0$.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = 5\xi$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 6x = 10$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 2)$.

72. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 2x$

α. Να ορίσετε την συνάρτηση $f'(x)$.

β. Να αποδείξετε ότι η $f'(x)$ έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[1, 3]$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f''(x) > 0$.

δ. Θεωρούμε τυχαία συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^2(x) + g(x) + 1}{g^2(x) + 1}$

ΚΟΠΗ-ΚΡΙΣ