

Κεφάλαιο 1ο
I. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

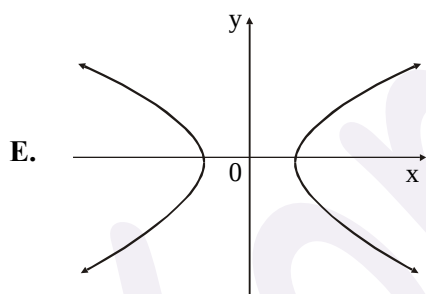
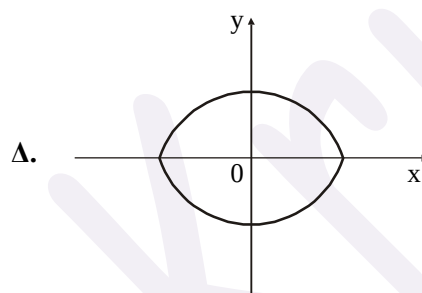
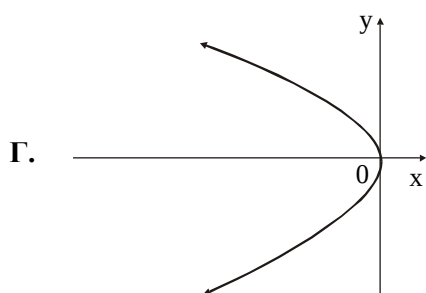
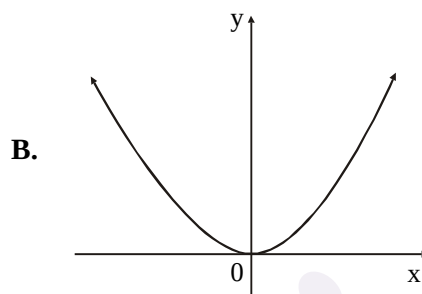
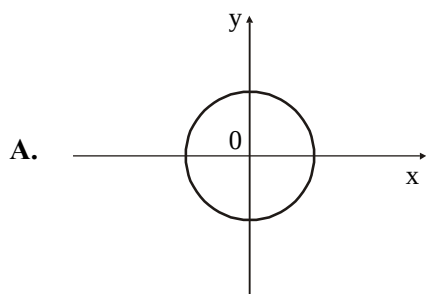
1

Ερωτήσεις του τύπου «Σωστό - Λάθος»

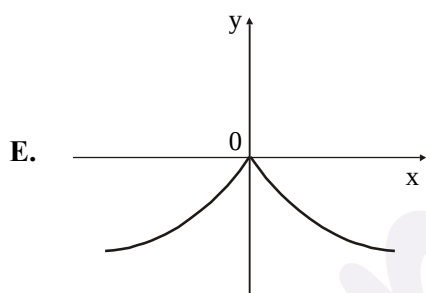
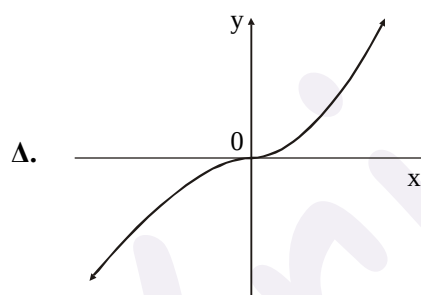
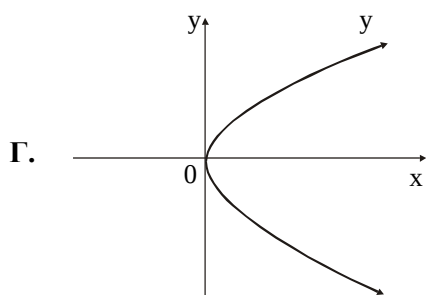
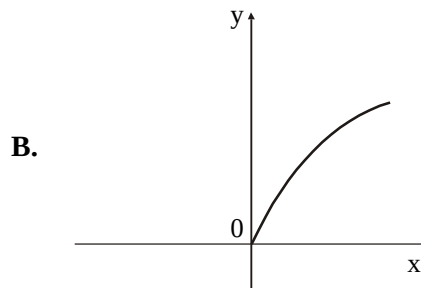
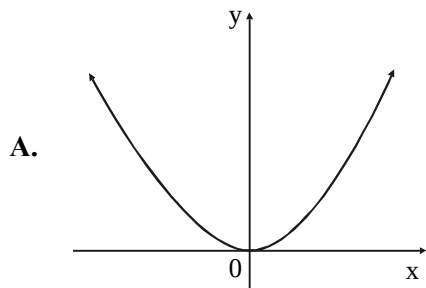
1. * Αν $A = \mathbb{N} - \{0, 1\}$, τότε η αντιστοιχία $f: A \rightarrow \{0, 1\}$ με
- $$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν το } x \text{ είναι πρώτος αριθμός} \\ 1, & \text{αν το } x \text{ είναι σύνθετος αριθμός} \end{cases}$$
- είναι συνάρτηση. Σ Λ
2. * Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$, ισχύει $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y > 0$. Σ Λ
3. * Για τη συνάρτηση $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, ισχύει $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Σ Λ
4. * Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $|f|$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$. Σ Λ
5. * Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$ μπορούν να βρεθούν, αν θέσουμε όπου $y = 0$ και λύσουμε την εξίσωση. Σ Λ
6. * Δύο συναρτήσεις f, g είναι ίσες, αν υπάρχουν κάποια $x \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $f(x) = g(x)$. Σ Λ
7. * Για να ορίζονται το άθροισμα και το γινόμενο δύο συναρτήσεων f και g θα πρέπει τα πεδία ορισμού τους να έχουν κοινά στοιχεία. Σ Λ
8. ** Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, οι συναρτήσεις g, h έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και ισχύει $f(g(x)) = f(h(x))$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες. Σ Λ
9. * Η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$, $x \neq 0$, είναι σταθερή. Σ Λ
10. * Αν το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα (α, β) , τότε η f δεν έχει ελάχιστο ούτε μέγιστο. Σ Λ
11. * Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$. Τότε η συνάρτηση $\frac{1}{f}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Σ Λ
12. ** Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ . Αν ο λόγος $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ είναι θετικός για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 \neq x_2$, τότε η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο Δ . Σ Λ
13. ** Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ . Σ Λ

14. ** Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Σ Λ
15. ** Αν μια περιττή συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο x_0 , τότε θα παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $-x_0$. Σ Λ
16. ** Αν μια άρτια συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο x_0 , τότε παρουσιάζει το ίδιο είδος ακροτάτου στο σημείο $-x_0$. Σ Λ
17. * Αν μια συνάρτηση f είναι άρτια, τότε είναι 1 - 1. Σ Λ
18. * Αν μια συνάρτηση f είναι 1 - 1, τότε είναι πάντοτε περιττή. Σ Λ
19. * Η συνάρτηση $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ είναι:
- i) άρτια, αν ο n είναι άρτιος Σ Λ
- ii) περιττή, αν ο n είναι περιττός. Σ Λ
20. ** Αν η συνάρτηση f είναι 1 - 1, τότε ισχύουν:
- i) $f(f^{-1}(x)) = x$ για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f Σ Λ
- ii) $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in D_f$. Σ Λ
21. * Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$. Τότε κάθε κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των C_f και $C_{f^{-1}}$ ανήκει στην ευθεία $y = x$. Σ Λ
22. * Αν μια συνάρτηση είναι άρτια, τότε υπάρχει η αντίστροφή της. Σ Λ
23. * Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τότε ισχύει ότι:
- i) $f \circ g = f \cdot g$ Σ Λ
- ii) $f \circ g = g \circ f$ Σ Λ
24. ** Δίνεται μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και μια συνάρτηση I , για την οποία ισχύει $I(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύει $(I \circ f)(x) = (f \circ I)(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σ Λ
25. ** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι γνησίως μονότονες στο $\mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ είναι:
- i) γνησίως αύξουσα, αν οι f, g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας Σ Λ
- ii) γνησίως φθίνουσα, αν οι f, g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας. Σ Λ
26. ** Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ με $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση f^2 είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ . Σ Λ
27. * Αν οι συναρτήσεις f και g είναι 1 - 1 στο $\mathbb{R}$, τότε και η συνάρτηση $g \circ f$ είναι 1 - 1 στο $\mathbb{R}$. Σ Λ

1. * Από τα παρακάτω διαγράμματα, γραφική παράσταση συνάρτησης είναι το διάγραμμα



2. * Από τα παρακάτω διαγράμματα **δεν** είναι γραφική παράσταση συνάρτησης το διάγραμμα



3. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$ είναι το σύνολο

A. $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

B. $\mathbb{R}$

Γ. $\mathbb{R} - \{-2\}$

Δ. $[2, +\infty)$

Ε. $\mathbb{R} - \{2\}$

4. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(9 - x^2)$ είναι το σύνολο

A. $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$

B. $\mathbb{R} - \{3\}$

Γ. $[3, +\infty)$

Δ. $(-3, 3)$

Ε. $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$

5. * Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \ln(2x - 1)$ είναι το σύνολο

A. $\mathbb{R}$

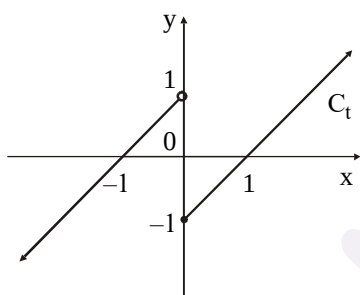
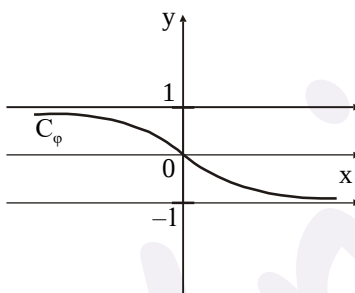
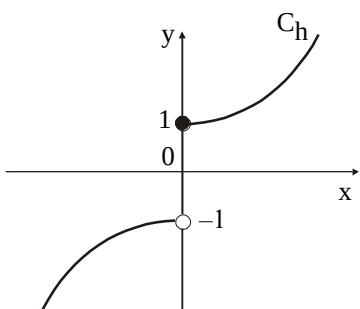
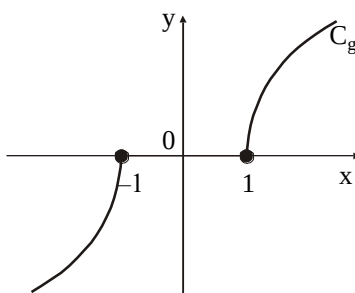
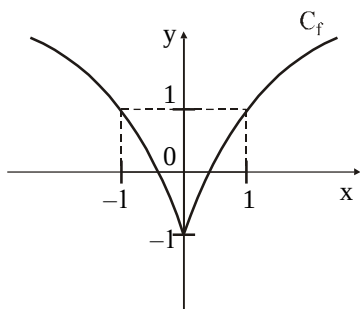
B. $(-\infty, \frac{1}{2})$

Γ. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

Δ. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

Ε. $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$

6. * Στα παρακάτω σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε συναρτήσεων: f, g, h, φ, t .



Το διάστημα $(-1, 1)$ είναι το σύνολο τιμών της συνάρτησης

- A.** f **B.** g **Γ.** h **Δ.** φ **Ε.** t

7. * Αν $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$, τότε το $f(3)$ είναι ίσο με

- A.** -3 **B.** -27 **Γ.** 27 **Δ.** 0 **Ε.** 81

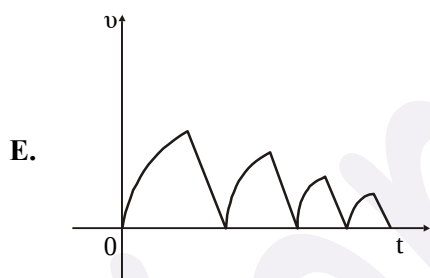
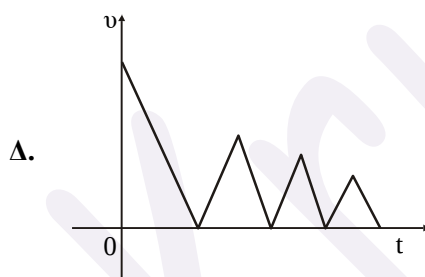
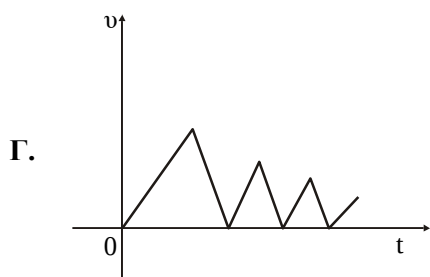
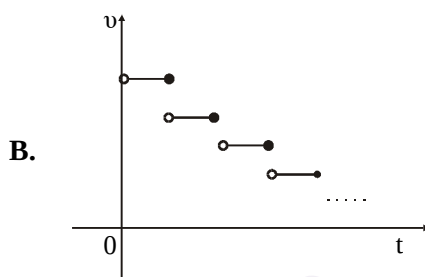
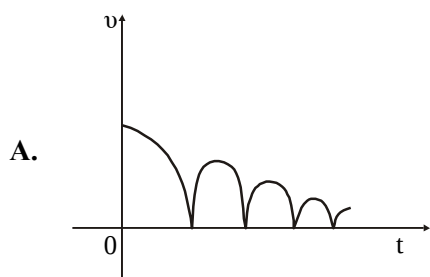
8. * Αν $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$, τότε ισχύει ότι

- A.** $f(x) = x + |x|$ **B.** $f(x) = |x| - x$
Γ. $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$ **Δ.** $f(x) = \frac{|x| - x}{2}$ **Ε.** $f(x) = |x|$

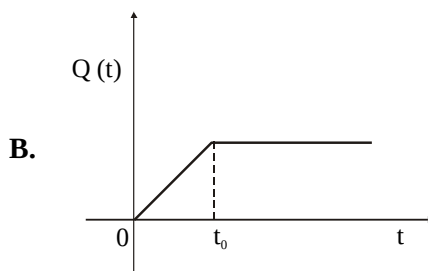
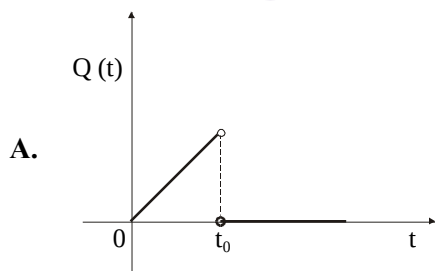
9. * Αν $f(x) = x^3$ και $\alpha \neq \beta$, τότε το $\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}$ είναι

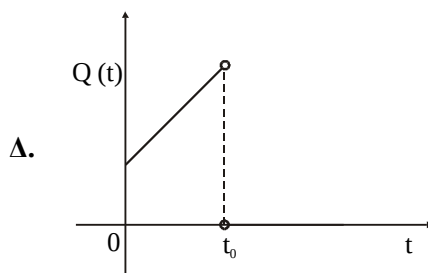
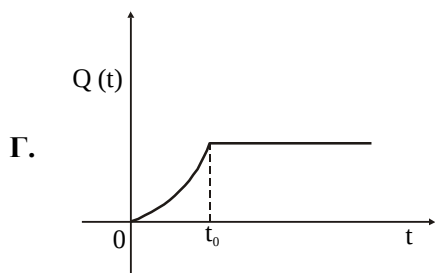
- A.** $(\alpha + \beta)^2$ **B.** $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ **Γ.** $\alpha^2 + \beta^2$
Δ. $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$ **Ε.** $3\alpha^2$

10. * Μια μπάλα αφήνεται από ένα ύψος h και αναπηδά στο έδαφος. Η ταχύτητα κατά την κάθοδό της έχει μέτρο $v = g \cdot t$ ενώ κατά την άνοδο έχει μέτρο $v = v_0 - g \cdot t$, όπου t η χρονική διάρκεια της αντίστοιχης κίνησης. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα εκφράζει το μέτρο της ταχύτητας της μπάλας, κάθε χρονική στιγμή t ;



11. * Αρχίζουμε να φουσκώνουμε ένα άδειο μπαλόνι με σταθερή παροχή αέρα. Τη χρονική στιγμή t_0 το μπαλόνι σκάει. Η μορφή της καμπύλης της συνάρτησης που εκφράζει την ποσότητα $Q(t)$ του αέρα στο μπαλόνι συναρτήσει του χρόνου t είναι





Ε. κανένα από τα προηγούμενα

12. * Το σύνολο των σημείων που η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \quad \text{τέμνει τον άξονα } x'x \text{ είναι}$$

Α. $\{-1, 1\}$ Β. $\{1\}$ Γ. $\{-1, 1, 3\}$ Δ. $\{-1, -3, 1\}$ Ε. $\{1, 3\}$

13. * Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{-2x+2}{x-3}, & x \neq 3 \\ 10, & x = 3 \end{cases}$

και οι παρακάτω προτάσεις:

I. $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$ II. $f(3) = g(3)$ III. $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Τότε ισχύει

Α. μόνο η I Β. μόνο η II Γ. μόνο οι I και II
Δ. μόνο η III Ε. κανένα από τα παραπάνω

14. * Αν η πολωνυμική εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $-1, 3$, τότε η εξίσωση $f(3x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς

Α. $1, -3$ Β. $\frac{1}{3}, -1$ Γ. $-\frac{1}{3}, 1$ Δ. $-2, 6$ Ε. $2, -6$

15. * Η συνάρτηση g της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$, της C_f με τύπο $f(x) = 1 - 2^x$ έχει τύπο

Α. $g(x) = 1 + 2^x$ Β. $g(x) = 1 - 2^{-x}$ Γ. $g(x) = 2^x - 1$
Δ. $g(x) = \ln(x-1)$ Ε. $g(x) = \ln(1-x)$

16. * Η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ ως προς τον άξονα $x'x$ είναι η

Α. $y = f(-x)$ Β. $y = -f(x)$ Γ. $y = |f(x)|$
Δ. $y = 2f(x)$ Ε. $y = -f(-x)$

17. * Το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^6 + x^4 + x^2 + 1$ με τον άξονα $x'x$ είναι

Α. 6 Β. 5 Γ. 4 Δ. 3 Ε. 0

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + kx^2 + \lambda x - 5$. Αν $f(1) = 8$ και $f(-1) = 4$, η τιμή της παράστασης $k + 2\lambda$ είναι ίση με

19. * Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{ax^2 + ax}$, $a < 0$, έχει πεδίο ορισμού τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους

Α. $x > 0$ Β. $x < -1$ Γ. $-1 \leq x \leq 0$ Δ. $x < a$ Ε. $x > -1$

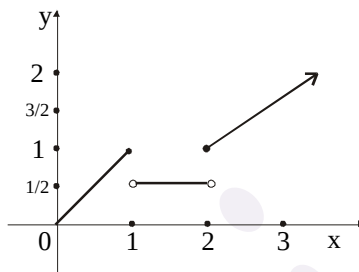
20. * Η συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα, είναι

Α. $f(x) = \frac{x}{2}$, αν $x \in [0, +\infty)$

Β. $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{αν } x \in (0, 1] \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } x \in (1, +\infty) \end{cases}$

Γ. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ \frac{x}{2}, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$ Δ. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } 1 < x < 2 \\ x - \frac{3}{2}, & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$

Ε. κανένα από τα προηγούμενα



21. * Δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Ο τύπος της συνάρτησης αυτής μπορεί να είναι

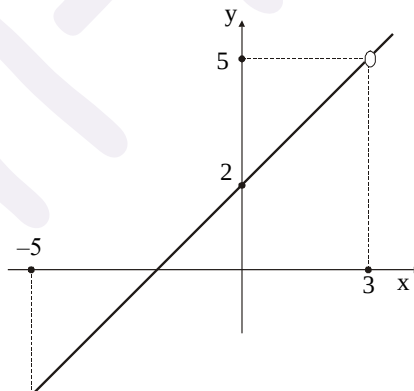
Α. $f(x) = x + 2$

Β. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

Γ. $f(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Δ. $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 10}{x + 5}$

Ε. κανένας από αυτούς



22. * Η γραφική παράσταση C_f μιας γνησίως αύξουσας συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει

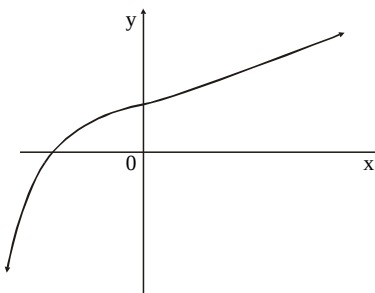
Α. δύο τουλάχιστον ρίζες

Β. μία μόνο ρίζα

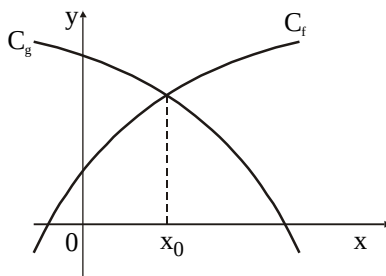
Γ. καμία ρίζα

Δ. περισσότερες από δύο ρίζες

Ε. μία ρίζα θετική



23. * Για τις συναρτήσεις f και g που οι γραφικές τους παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα, είναι **λάθος** ο ισχυρισμός



- Α. $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Β. $f(x) < g(x)$ αν $x < x_0$
 Γ. $f(x) > g(x)$ αν $x > x_0$
 Δ. $f(x_0) = g(x_0)$
 Ε. η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

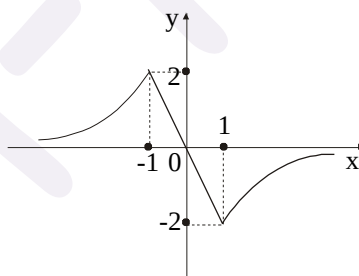
24. * Η μονοτονία μιας συνάρτησης f φαίνεται στον πίνακα.

x	0	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(1) = 0$	$f(2) = -1$	$+\infty$

Τότε **δεν** ισχύει ότι

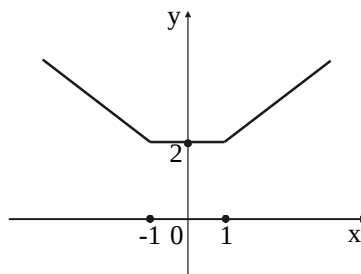
- Α. Η f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0, +\infty)$
 Β. Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1]$ και $[2, +\infty)$
 Γ. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$
 Δ. Η f έχει μέγιστο το 0 και ελάχιστο το -1
 Ε. Είναι $f(x) < 0$ όταν $0 < x < 1$

25. * Για τη συνάρτηση f , που η γραφική της παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, **δεν** ισχύει ότι:



- Α. Έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$
 Β. Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-2, 2]$
 Γ. Είναι περιττή
 Δ. Έχει ελάχιστο το -2 και μέγιστο το 2
 Ε. Είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$

26. * Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα. Από τις παρακάτω προτάσεις **λανθασμένη** είναι η



- Α. Η f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$
 Β. Η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[2, +\infty)$
 Γ. Η f είναι άρτια
 Δ. Η f είναι 1-1
 Ε. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -1]$, σταθερή στο διάστημα $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

27. * Η συνάρτηση $f(x) = |\eta\mu x - 1|$, $x \in [0, 2\pi]$ έχει μέγιστη τιμή όταν το x είναι ίσο με

- A. -1 B. 0 Γ. $\frac{\pi}{2}$ Δ. $\frac{3\pi}{2}$ E. 2

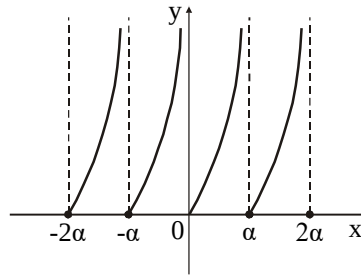
28. * Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Από τις παρακάτω προτάσεις να βρείτε αυτήν η οποία είναι **λάθος**.

A. Η f είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε διάστημα της μορφής $(\kappa\alpha, (\kappa + 1)\alpha)$ (κ ακέραιος)

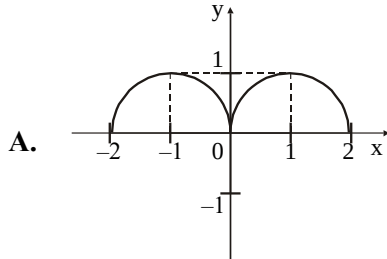
B. Η f είναι περιοδική Γ. Η f δεν είναι 1-1

Δ. Η f είναι άρτια

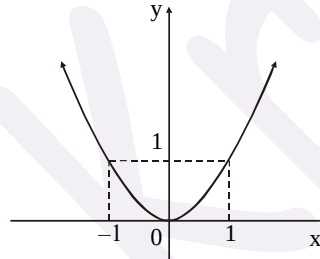
E. Ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της



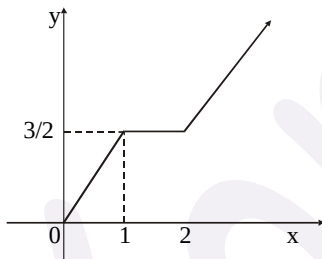
29. * Από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις γραφική παράσταση συνάρτησης 1-1 είναι η



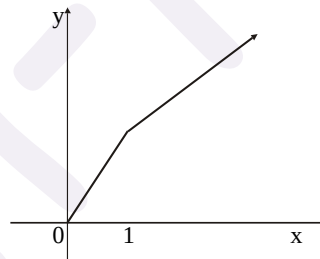
B.



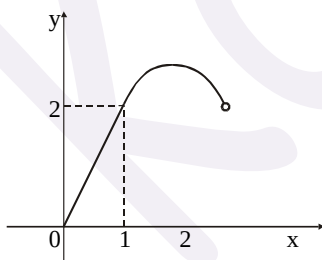
Γ.



Δ.



E.



30. * Για τη συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα, ισχύει ότι

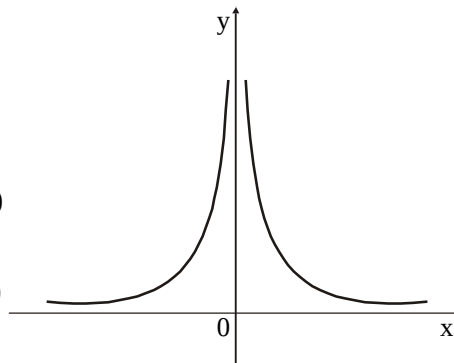
A. είναι 1-1

B. είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Γ. αντιστρέφεται

Δ. είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

E. κανένα από τα προηγούμενα



31. * Έστω μια συνάρτηση f , η οποία αντιστρέφεται. Τότε οι γραφικές παραστάσεις της f και της f^{-1} είναι συμμετρικές
- Α. ως προς την ευθεία $y = x$ Β. ως προς την ευθεία $y = 2x$
 Γ. ως προς τον άξονα $y'y$ Δ. ως προς την αρχή των αξόνων
 Ε. ως προς τον άξονα $x'x$

32. * Η συνάρτηση $f(x) = 2e^{-x}$ έχει αντίστροφη την
- Α. $g(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$ Β. $h(x) = \ln\left(\frac{2}{x}\right)$
 Γ. $\varphi(x) = \frac{1}{2} \ln x$ Δ. $\sigma(x) = \sqrt{\ln x}$ Ε. $t(x) = \ln(2 - x)$

33. * Από τις παρακάτω συναρτήσεις δεν έχει αντίστροφη η συνάρτηση
- Α. $y = \eta\mu x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ Β. $y = x^3 + 1$
 Γ. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ Δ. $y = \frac{2}{3} e^x$ Ε. $y = \ln(x - 3), x > 3$

34. * Αν η συνάρτηση g έχει αντίστροφη την f , τότε το $g(f(x))$ είναι ίσο με
- Α. 1 Β. $g(x) \cdot f(x)$ Γ. $\frac{1}{x}$
 Δ. x Ε. κανένα από τα παραπάνω

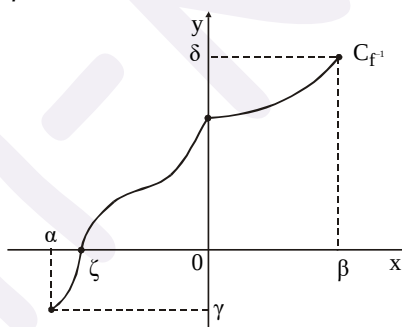
35. ** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας συνάρτησης f . Τότε **λάθος** είναι ο ισχυρισμός

Α. πεδίο ορισμού της f είναι το $[\gamma, \delta]$

Β. σύνολο τιμών της f είναι το $[\alpha, \beta]$

Γ. $f^{-1}(\zeta) = 0$ Δ. $f(0) = \zeta$

Ε. Η f έχει ελάχιστο το α για $x = 0$



36. * Αν $f(x) = ax^2$ με $D_f = [0, +\infty)$ και $a > 0$, τότε
- Α. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \frac{1}{ax^2}$, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^*$
 Β. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \frac{1}{a} \sqrt{x}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$
 Γ. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{a}}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$
 Δ. Η f αντιστρέφεται και ισχύει $f^{-1}(x) = \sqrt{ax}$, $D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$
 Ε. Η f δεν αντιστρέφεται

37. * Αν $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ με $x > -1$, τότε η f^{-1} έχει τύπο

A. $f^{-1}(x) = (x-1)^3$

B. $f^{-1}(x) = x^3 - 1$

Γ. $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}$

Δ. $f^{-1}(x) = -\sqrt[3]{x+1}$

Ε. $f^{-1}(x) = (x+1)^3$

38. * Αν $f(x) = x^4 - 4x^3 - 3x + 7$ και $g(x) = 7$, τότε η συνάρτηση $g \circ f$ έχει τύπο

A. $7x^4 - 28x^3 - 21x + 49$

B. $x^2 - 4x - 14$

Γ. 289

Δ. 7

Ε. $(x^2 - 7)^2$

39. * Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = 16 - x^2$, τότε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι

A. $(-\infty, 4]$

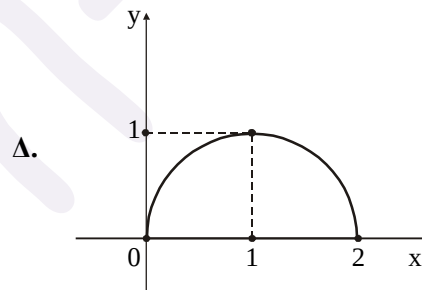
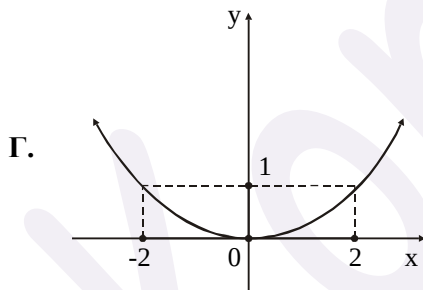
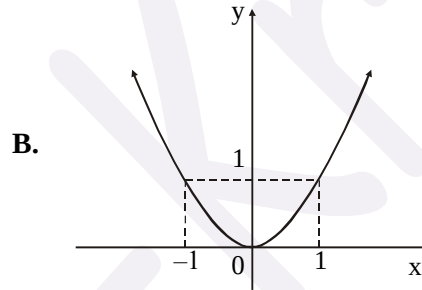
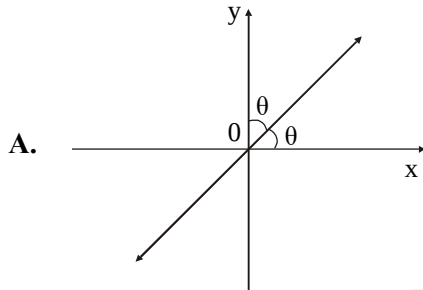
B. $[-4, 4]$

Γ. $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

Δ. $(-4, 4)$

Ε. $(0, 4)$

40. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = x$, $g(x) = x^2$. Αν $f = g \circ h$, τότε η γραφική παράσταση της f είναι



Ε. καμία από αυτές

41. * Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{x^2 + 9}$. Τότε ισχύει ότι

A. $Dg = [-9, +\infty]$

B. $Dg = \mathbb{R}$

Γ. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

Δ. Η g είναι περριτή

Ε. Έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$

1. * Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{7-x}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στο πεδίο ορισμού της που γράφεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1. f	α. $\mathbb{R}$
2. g	β. $(-\infty, 7]$
3. $f + g$	γ. $[3, 7]$
4. $f - g$	δ. $(3, 7]$
5. $f \cdot g$	ε. $[3, 7)$
6. $\frac{f}{g}$	ζ. $(3, 7)$
7. $\frac{g}{f}$	η. $[3, +\infty)$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4	5	6	7

2. * Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με ένα και μόνο στοιχείο της στήλης Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

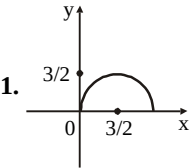
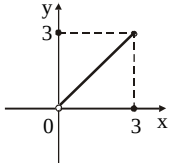
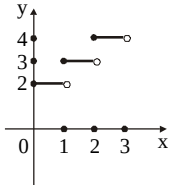
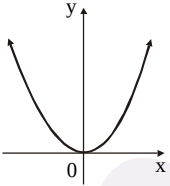
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(2x)$	α. $\frac{x^2+2}{x^2-2}$
2. $2f(x)$	β. $\frac{(x+2)^2}{(x-2)^2}$
3. $f(x^2)$	γ. $\frac{2(x+2)}{x-2}$
4. $[f(x)]^2$	δ. $\frac{x+1}{x-1}$
	ε. $\frac{2x+4}{2x-4}$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

3. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το πεδίο ορισμού της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

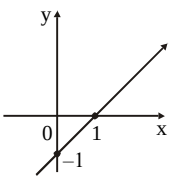
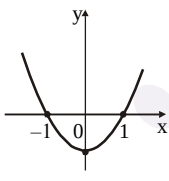
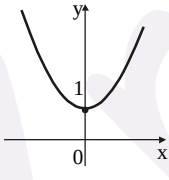
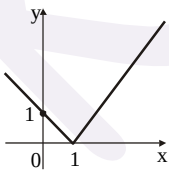
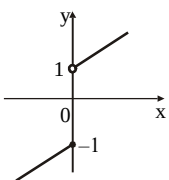
Στήλη Α	Στήλη Β
1.  2.  3.  4. 	α. $D_f = \mathbb{R}$ β. $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ γ. $D_f = [0, 3]$ δ. $D_f = (0, 3]$ ε. $D_f = [0, 3)$ ζ. $D_f = (0, 3)$ η. $D_f = [0, +\infty)$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

4. * Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στη γραφική της παράσταση που βρίσκεται στη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

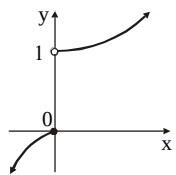
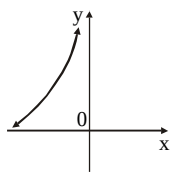
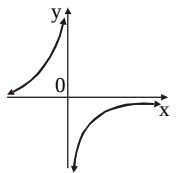
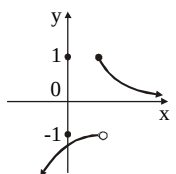
Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = x^2 - 1$	α. 
2. $f(x) = x - 1$	β. 
3. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x \leq 0 \\ x + 1, & x > 0 \end{cases}$	γ. 
4. $f(x) = x - 1 $	δ. 
	ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

5. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α το σύνολο τιμών της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

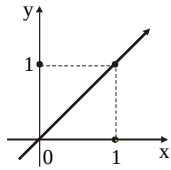
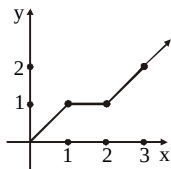
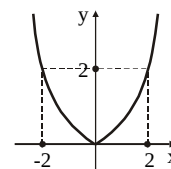
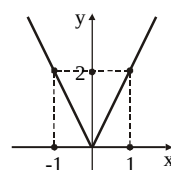
Στήλη Α	Στήλη Β
1.  2.  3.  4. 	α. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ β. $\mathbb{R}$ γ. $(0, +\infty)$ δ. $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ ε. $(-1, 1]$ ζ. $(-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$ η. $(-\infty, -1) \cup (0, 1]$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

6. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α τον τύπο της συνάρτησης από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

Πίνακας Ι

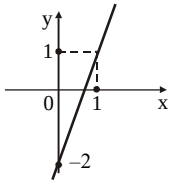
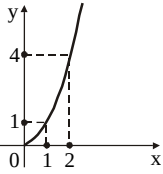
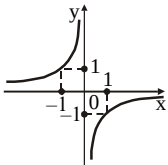
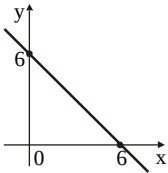
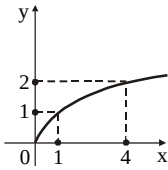
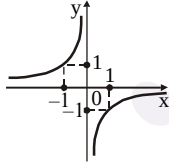
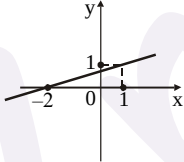
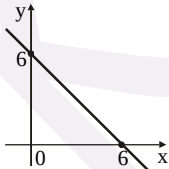
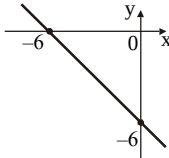
Στήλη Α	Στήλη Β
1.  2.  3.  4. 	α. $f(x) = x$ β. $f(x) = 2 x$ γ. $f(x) = x+1$ δ. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ x-1, & x \geq 2 \end{cases}$ ε. $f(x) = \frac{1}{2} x^2$ ζ. $f(x) = x^2$ η. $f(x) = \frac{2}{ x }$

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

7. * Να αντιστοιχίσετε σε κάθε γραφική παράσταση της στήλης Α τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της από τη στήλη Β του πίνακα Ι, συμπληρώνοντας τον πίνακα ΙΙ.

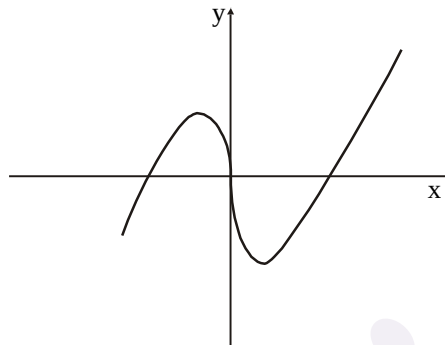
Πίνακας Ι

Στήλη Α	Στήλη Β
1.  2.  3.  4. 	α.  β.  γ.  δ.  ε. 

Πίνακας ΙΙ

1	2	3	4

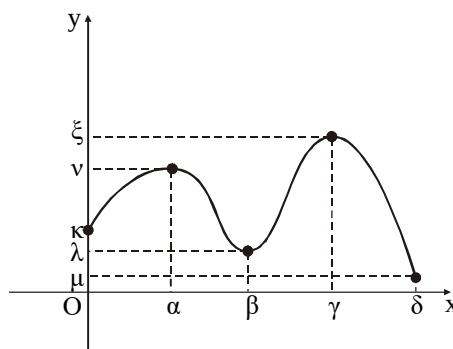
1. * Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Στο ίδιο σχήμα να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $-f(x)$ β) $|f(x)|$ γ) $2f(x)$

2. * Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια, η g περιττή και $h = g \circ f$, $\varphi = f \circ g$, να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$\varphi(x)$
-3	0	0		
-2	2	2		
-1	2	2		
0	0	0		
1				
2				
3				

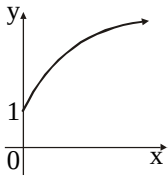
3. * Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση του παρακάτω σχήματος, να συμπληρώσετε στον πίνακα το είδος μονοτονίας (αν είναι γνησίως μονότονη) και το είδος των ακροτάτων σε καθένα από τα διαστήματα που ζητούνται:



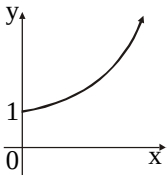
Διάστημα	Μονοτονία	Μέγιστο	Ελάχιστο
$[0, \alpha]$			
$[\alpha, \beta]$			

$[0, \gamma]$			
$[\beta, \gamma]$			
$[\gamma, \delta]$			
$[\alpha, \gamma]$			

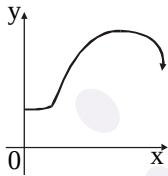
4. * Κάτω από κάθε γραφική παράσταση να συμπληρώσετε: το κατάλληλο είδος μονοτονίας (αν είναι μονό-
τονη) ή τη φράση “όχι μονότονη”.



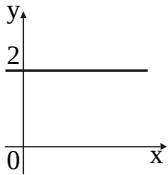
.....



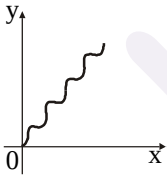
.....



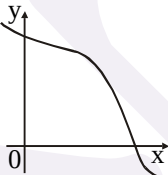
.....



.....

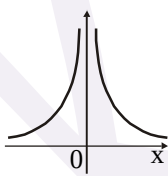


.....

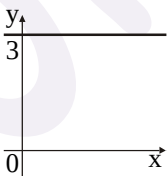


.....

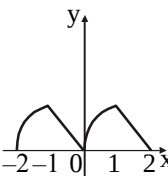
5. * Κάτω από κάθε γραφική παράσταση συμπληρώστε την ιδιότητα: “άρτια”, “περιττή”, “ούτε άρτια, ούτε
περιττή”.



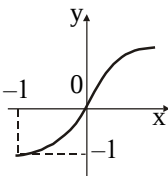
.....



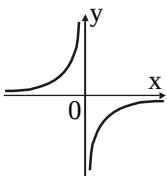
.....



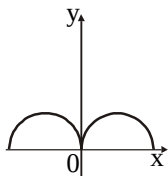
.....



.....

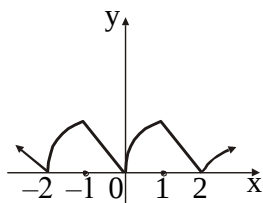


.....

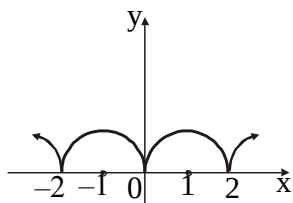


.....

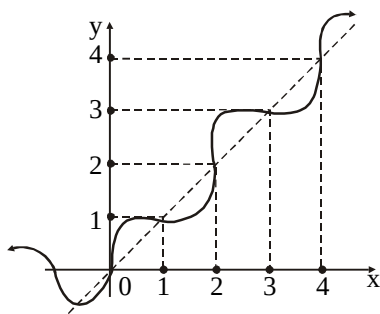
6. * Κάτω από κάθε γραφική παράσταση συμπληρώστε την ιδιότητα: “περιοδική” ή “μη περιοδική”.



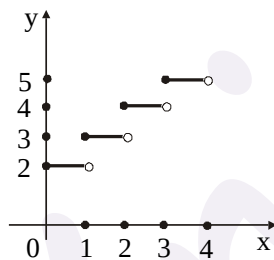
.....



.....



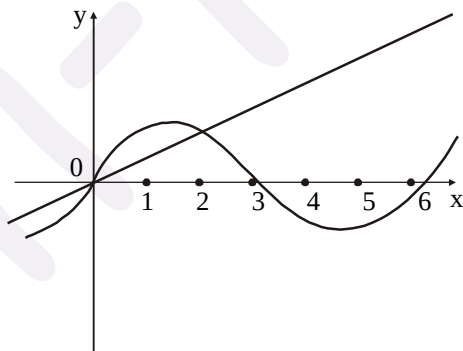
.....



.....

8. * Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}x$ και $g(x) = \eta\mu x$.

Να βρείτε στο ίδιο σχήμα τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x) = f(x) + g(x)$ για $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.



1. ** Δίνονται δύο συναρτήσεις f, g με f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον ισχύει $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν x_1, x_2, x_3, x_4 είναι πραγματικοί αριθμοί ώστε $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$, να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς:

$$f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), g(x_1), g(x_2), g(x_3), g(x_4)$$

2. ** Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \sqrt{x-2},$$

$$\beta) g(x) = \ln(x-2),$$

$$\gamma) h(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-4}},$$

$$\delta) \varphi(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x}}$$

Να τις τοποθετήσετε σε μια σειρά ώστε το πεδίο ορισμού καθεμιάς να είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της επόμενης.

Ερωτήσεις ανάπτυξης

1. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 2$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(0), f(-3), f(2)$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες

γ) Να βρείτε τις τιμές $f(t), f(xt), f(x+h), x, t, h \in \mathbb{R}$.

2. ** Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$$

$$\beta) f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{|x-2|-1} + \frac{1}{|3x-8|-|x|}$$

$$\delta) f(x) = \frac{5}{|x-3|-1}$$

$$\epsilon) f(x) = \log(x^2 + x - 2) + \log \frac{x+3}{3-x}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{\sin x}{2\eta\mu x - 1} + \frac{1}{\epsilon\phi x - 1}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\zeta) f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

α) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f .

ΧΡΥΣΑΝΘΟΠΟΥΛΟΣ ΚΩΣΤΑΣ, Μ.Εδ. Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
5^ο ΓΕΛ ΗΛΙΟΥΠΟΛΗΣ

$f_1(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$	$f_2(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1}$	$f_3(x) = (\sqrt{x+1})^2$
$f_4(x) = x \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$	$f_5(x) = \ln e^{x+1}$	$f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$f_2(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	$f_3(x) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
$f_4(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}}$	$f_5(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f_6(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1} \sqrt{x+1}}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

5. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $g(x) = \frac{2x^2 + 2ax + a}{2(x^2 - 1)}$, $a \in \mathbb{R}$,

$x > 0$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g

β) Για ποια τιμή του a ισχύει $f = g$;

6. ** Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 2 \\ \sqrt{x}, & x > 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x < 3 \\ -2x+3, & x \geq 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

α) $f + g$ β) $f \cdot g$ γ) $\frac{f}{g}$

7. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x_1) + f(x_2) = f\left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 \cdot x_2}\right)$ για κάθε x_1, x_2 του πεδίου ορισμού της.

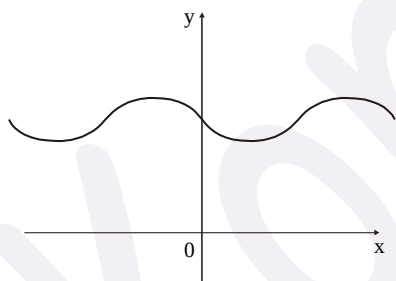
8. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

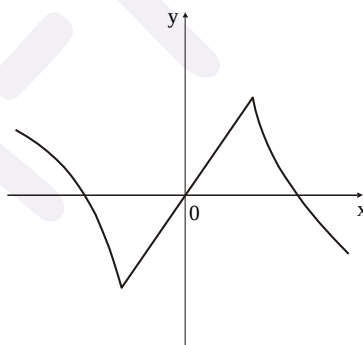
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της.

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f .

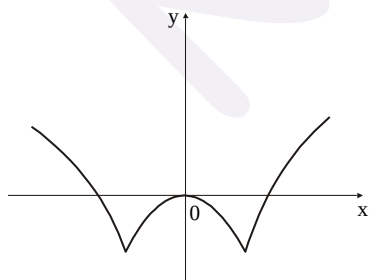
9. ** Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
- α) $f(x^2)$ β) $f(x - 4)$ γ) $f(\ln x)$
10. ** Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνά από την αρχή των αξόνων.
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια.
- γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(|x|) = f(x)$.
11. ** Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.
12. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 7x^2 + 19x - 7$, $x \in (-5, 5)$.
- α) Να βρείτε τη διαφορά $f(x) - f(4)$.
- β) Να βρείτε τον αριθμό $M > 0$ τέτοιο ώστε $|f(x) - f(4)| \leq M \cdot |x - 4|$ για κάθε $x \in (-5, 5)$.
13. ** Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση f είναι άρτια, όταν για κάθε $x \in D_f$ ισχύει $-x \in D_f$ και $f(-x) = f(x)$, για κάθε $x \in D_f$, ενώ είναι περιττή όταν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in D_f$.
- α) Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παριστάνουν άρτια ή περιττή συνάρτηση ή δεν παριστάνουν άρτια ούτε περιττή.



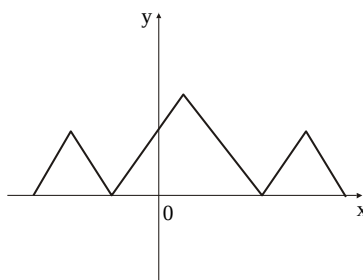
(I)



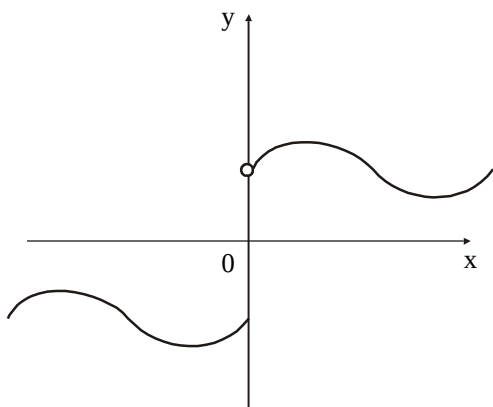
(II)



(III)



(IV)



(V)

β) Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + f(-x)$ είναι άρτια.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή και παρουσιάζει μέγιστο για $x = x_0$, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -x_0$.

14. ** Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a, \beta]$ με $a, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-\beta, -a]$.

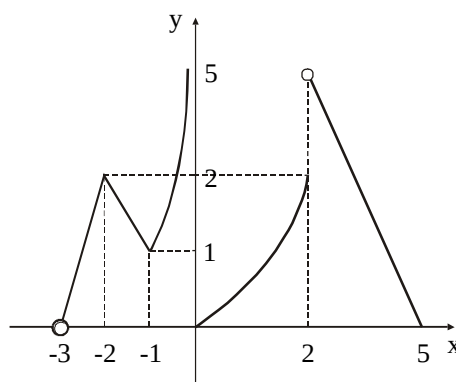
15. ** α) Για κάθε $a > 0$, να δείξετε ότι $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

16. ** Έστω f, g δύο συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα Δ , οι οποίες παίρνουν θετικές τιμές για κάθε $x \in \Delta$ και οι οποίες είναι γνησίως αύξουσες στο Δ . Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\frac{1}{f} + \frac{1}{g}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

17. ** Η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Από αυτό να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της f
- β) το σύνολο τιμών της f
- γ) το διάστημα και το είδος μονοτονίας της f
- δ) τα ακρότατα της f



ε) τον τύπο της f , αν είναι γνωστό ότι:

στο διάστημα $[-1, 0)$ είναι υπερβολή της μορφής $y = \frac{a}{x}$ και

στο διάστημα $[0, 2)$ είναι παραβολή της μορφής $y = ax^2$.

18. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1$, $x \in [-2, 3]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

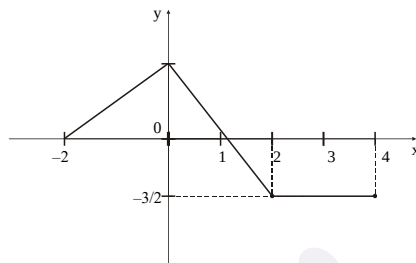
$$\alpha) f_1(x) = f(x) + 1$$

$$\beta) f_2(x) = 2f(x)$$

$$\gamma) f_3(x) = -f(x)$$

$$\delta) f_4(x) = |f(x)|$$

19. ** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[2, 4]$. Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:



$$\alpha) g(x) = f(x) + 1$$

$$\beta) h(x) = -f(x) \quad \gamma) \varphi(x) = |f(x)|.$$

20. ** α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = x^{2v}$, v θετικός ακέραιος.

β) Ομοίως των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = x^{2v+1}$, v θετικός ακέραιος.

21. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $2f$, f^2 και $\frac{f}{f}$. Στη συνέχεια να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών στο ίδιο σύστημα αξόνων.

22. ** Είναι γνωστό ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού D_f είναι περιοδική με περίοδο $T > 0$, όταν για κάθε $x \in D_f$ ισχύουν:

- $x + T \in D_f$, $x - T \in D_f$
- $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = |\eta \mu x| \text{ με } x \in [-4\pi, 4\pi]. \text{ Τι παρατηρείτε;}$$

23. ** Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f , g να δικαιολογήσετε ότι $(g \circ f)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις f , g οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

24. ** Ποια καμπύλη είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x) = f(f(f(x))), \text{ αν } f(x) = \frac{1}{1-x};$$

25. ** Να γράψετε τη συνάρτηση $f(x) = x^x$, $x > 0$ ως σύνθεση δύο άλλων συναρτήσεων.

26. ** Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax$, η οποία ονομάζεται και γραμμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Να εξετάσετε αν το άθροισμα δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Το ίδιο και για το γινόμενο.

27. ** Δίνονται οι συναρτήσεις f , g ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f \circ f$ και $g \circ g$.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.

28. ** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

29. ** Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις της μορφής $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

α) $f = f^{-1}$ β) $f = -f^{-1}$ γ) $f = f^{-1} + c$ ($c \neq 0$, σταθερά)

30. ** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε την f^{-1} .

31. ** Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $h(x) = \frac{1}{x+2}$ με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$.

A. α) Να βρείτε μια συνάρτηση g ώστε $f \circ g = h$.

β) Να βρείτε μια συνάρτηση φ ώστε $\varphi \circ f = h$.

B. α) Να βρείτε τις f^{-1} , g^{-1} , h^{-1} (αντίστροφες των f , g , h).

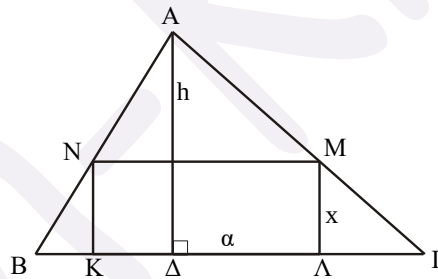
β) Να βρείτε τις $f^{-1} \circ g^{-1}$ και $g^{-1} \circ f^{-1}$.

γ) Να εξετάσετε αν $g^{-1} \circ f^{-1} = h^{-1}$ (δικαιολογήστε την απάντησή σας).

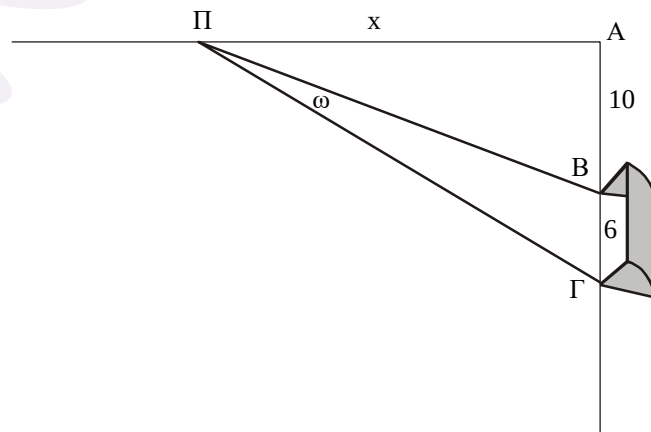
32. ** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με βάση $B\Gamma = a$ και ύψος $A\Delta = h$. Ένα ορθογώνιο $K\Lambda MN$ είναι εγγεγραμμένο στο $AB\Gamma$, όπως δείχνει το σχήμα.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο L του ορθογωνίου ως συνάρτηση του ύψους του x .

β) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x .



33. ** Ένας παίκτης Π του ποδοσφαίρου επιτίθεται προς το αντίπαλο τέρμα $B\Gamma$ κινούμενος πάνω στην ευθεία ΠA . Αν $AB = 10$ και $B\Gamma = 6$:



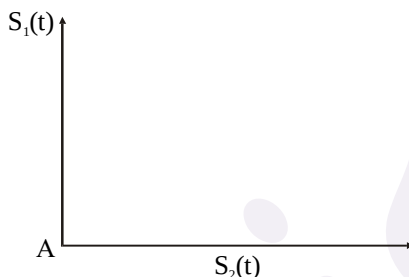
α) να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών $\Lambda \Pi B$ και $\Lambda \Pi \Gamma$ ως συνάρτηση της απόστασης $\Pi A = x$

β) να υπολογίσετε την εφω ως συνάρτηση του x

γ) από ποια απόσταση x θα πρέπει να “σουτάρει” ο παίκτης ώστε να έχει το ευρύτερο δυνατό οπτικό πεδίο προς το τέρμα;

$$\text{Δίνεται ότι } \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1 + \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}.$$

34. ** Δύο κινητά διασταυρώνονται σε ένα σημείο A και το πρώτο κατευθύνεται βόρεια του A με σταθερή ταχύτητα $v_1 = 60 \text{ km/h}$, ενώ το δεύτερο κατευθύνεται ανατολικά του A με σταθερή ταχύτητα $v_2 = 80 \text{ km/h}$.



α) Να εκφράσετε την απόσταση s των κινητών ως συνάρτηση του χρόνου t . Με πόση ταχύτητα απομακρύνεται το ένα από το άλλο;

β) Αν M το μέσον της απόστασης s να εκφράσετε την απόσταση AM σαν συνάρτηση του t .

γ) Πόσο πρέπει να ελαττωθεί η ταχύτητα του δεύτερου κινητού, ώστε μετά από 4 ώρες το M να απέχει από το A 180 km;

35. ** Μια μπάλα πετιέται κατακόρυφα από το έδαφος με ταχύτητα 20 m/s. Το ύψος h από το έδαφος στο οποίο φθάνει η μπάλα είναι συνάρτηση του χρόνου t και δίνεται από τον τύπο $h = f(t) = 20t - 5t^2$.

α) Να βρείτε το ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα τις χρονικές στιγμές:

$$\frac{1}{2} \text{ s}, 1 \text{ s}, 2 \text{ s}, 3 \text{ s}, \frac{7}{2} \text{ s}, 4 \text{ s}.$$

β) Ποιο είναι το μεγαλύτερο ύψος στο οποίο φθάνει η μπάλα;

γ) Ύστερα από πόσο χρόνο η μπάλα θα φθάσει σε ύψος $\frac{160}{9} \text{ m}$;

δ) Να βρείτε το λόγο $v(t) = \frac{f(t) - f(2)}{t - 2}$, $t \neq 2$.

36. ** Το τμήμα παραγωγής μιας αυτοκινητοβιομηχανίας λειτουργεί μέχρι 10 ώρες ημερησίως και ο αριθμός των αυτοκινήτων που παράγει κάθε μέρα μετά από t ώρες λειτουργίας είναι $N(t) = 100t - 5t^2$ (t ακέραιος). Το ημερήσιο κόστος $K(x)$ σε χιλιάδες “εύρο” για την παραγωγή x αυτοκινήτων είναι $K(x) = 15 + 8x$.

α) Να βρείτε το ημερήσιο κόστος K ως συνάρτηση του χρόνου λειτουργίας του τμήματος παραγωγής.

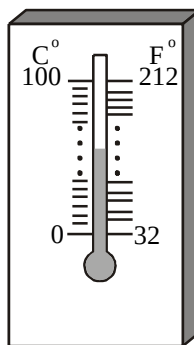
β) Μέχρι πόσες ώρες μπορεί να λειτουργεί το τμήμα παραγωγής ώστε το ημερήσιο κόστος παραγωγής να μην υπερβαίνει τα 3,885 εκατομμύρια “εύρο”;

37. ** Το εισιτήριο του τρένου που συνδέει δύο πόλεις κοστίζει 0 δρχ. για παιδιά μικρότερα των 3 ετών, 2.500 δρχ. για παιδιά από τριών ετών και άνω αλλά μικρότερα των 12 ετών και 6.000 δρχ. για κάθε άτομο από 12 ετών και άνω.

α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

38. ** Στο θερμόμετρο του σχήματος μπορούμε να έχουμε τη θερμοκρασία ενός χώρου σε βαθμούς Κελσίου (C), αλλά και σε βαθμούς Φαρενάιτ (F). Θεωρούμε δεδομένο ότι η σχέση που συνδέει τις τιμές της θερμοκρασίας σε C με τις τιμές σε F είναι γραμμική (η γραφική της παράσταση είναι ευθεία).



- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς C σε βαθμούς F.
- β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης η οποία μετατρέπει τους βαθμούς F σε βαθμούς C.
- γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται με τον ίδιο αριθμό και στις δύο κλίμακες.
39. ** Σε πείραμα σχετικό με την εκπαίδευση των ζώων, χρησιμοποιήθηκε ένας ποντικός, τον οποίο ανάγκασαν να διασχίσει πολλές φορές κάποιο λαβύρινθο σ' ένα εργαστήριο. Ο χρόνος σε λεπτά, που ο ποντικός χρειάζεται για να διασχίσει το λαβύρινθο, δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = 4 + \frac{14}{x}$, όπου x ο αριθμός των δοκιμών.
- α) Πόσο χρόνο χρειάστηκε ο ποντικός κατά την 7η δοκιμή;
- β) Από ποια δοκιμή και μετά θα χρειαστεί 5 λεπτά ή και λιγότερο;
- γ) Θα μπορέσει ποτέ να κάνει λιγότερο από 4 λεπτά;
40. ** Από μετρήσεις διαπιστώθηκε ότι η καρδιά της γυναίκας μπορεί να φθάσει τους 216 το πολύ σφυγμούς ανά λεπτό σε ηλικία 5 ετών και τους 196 το πολύ σε ηλικία 25 ετών. Αν ο μέγιστος αριθμός των σφυγμών ως συνάρτηση της ηλικίας είναι της μορφής $y = ax + b$, τότε:
- α) να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης
- β) να υπολογίσετε το μέγιστο αριθμό των σφυγμών ανά λεπτό στα 37 χρόνια μιας γυναίκας.
41. ** Σε x έτη από τώρα, ο πληθυσμός μιας κοινότητας θα είναι $f(x) = 20 - \frac{6}{x+1}$ χιλιάδες. Να βρείτε:
- α) πόσος θα είναι ο πληθυσμός σε 7 χρόνια από τώρα
- β) πόσο θα αυξηθεί ο πληθυσμός κατά τη διάρκεια του 7ου χρόνου
- γ) τι θα συμβεί, αν το x αυξάνεται "απεριόριστα";
42. ** Για μικρές μεταβολές της θερμοκρασίας ο τύπος που δίνει το μήκος ℓ μιας μεταλλικής ράβδου, ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t F°, είναι:
- $$\ell - \ell_0 = \alpha t_0 (t - t_0)$$
- όπου: ℓ_0 είναι το αρχικό μήκος της ράβδου σε θερμοκρασία t_0 F° και α σταθερά που εξαρτάται από τον τύπο του μετάλλου.
- α) Αν το αρχικό μήκος της ράβδου είναι 100 cm σε θερμοκρασία 60 F° και $\alpha = 10^{-5}$, να γράψετε την εξίσωση που δίνει το μήκος ℓ της ράβδου ως συνάρτηση της θερμοκρασίας t F°.
- β) Σε ποια θερμοκρασία το μήκος της ράβδου είναι ίσο με 100, 012 cm;

43. ** Σε τρεις ασθενείς έχει δοθεί αντιπυρετικό φάρμακο και οι θερμοκρασίες τους σε βαθμούς C, ως συναρτήσεις του χρόνου σε ώρες, δίνονται από τους παρακάτω τύπους, οι οποίοι ισχύουν μέχρι την αποκατάσταση της φυσιολογικής θερμοκρασίας:

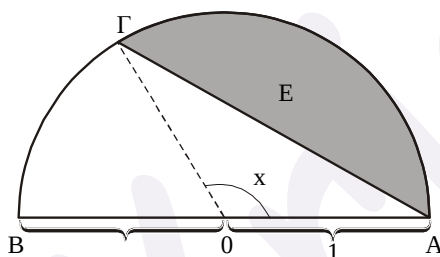
$$f_1(x) = 40 - \frac{3}{2}x \quad f_2(x) = 39 - x \quad f_3(x) = 38 - \frac{1}{2}x$$

Σε τέταρτο ασθενή έχει δοθεί διαφορετικό αντιπυρετικό, και η συνάρτηση της θερμοκρασίας του ως προς το χρόνο είναι η: $f_4(x) = f_1^{-1}(x) + 12$.

- α) Να βρείτε τη χρονική στιγμή x , κατά την οποία οι θερμοκρασίες των τριών πρώτων ασθενών συμπίπτουν.
β) Ποιο αντιπυρετικό είναι πιο αποτελεσματικό έως τη δεδομένη αυτή στιγμή;

44. ** α) Να εκφράσετε ως συνάρτηση της γωνίας x rad όπου $0 \leq x \leq \pi$ το εμβαδόν E του διπλανού κυκλικού τμήματος.

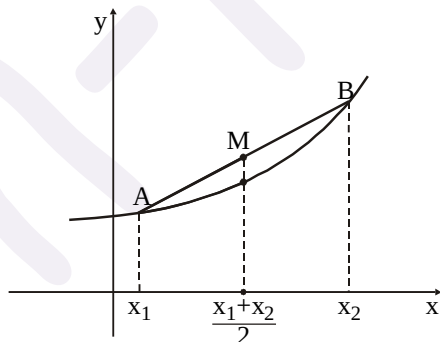
- β) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του μεικτογράμμου τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση της γωνίας x rad, όπου $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.



45. ** α) Το μέσο M μιας χορδής AB της καμπύλης μιας συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από το αντίστοιχο σημείο της καμπύλης. Να εκφράσετε με τη βοήθεια μιας ανισότητας την παραπάνω πρόταση.

- β) Να εξετάσετε αν για τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ ισχύει η παραπάνω ιδιότητα.

- γ) Ομοίως για τη συνάρτηση $g(x) = e^x$.



ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

Κεφάλαιο 1ο I. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις του τύπου “Σωστό-Λάθος”

1.	Σ
2.	Σ
3.	Σ
4.	Λ
5.	Σ
6.	Λ
7.	Σ
8.	Σ
9.	Λ
10.	Σ

11.	Σ
12.	Σ
13.	Σ
14.	Λ
15.	Σ
16.	Σ
17.	Λ
18.	Λ
19. i)	Σ
19. ii)	Σ

20. i)	Σ
20. ii)	Σ
21.	Σ
22.	Λ
23. i)	Λ
23. ii)	Λ
24.	Σ
25. i)	Σ
25. ii)	Σ
26.	Σ
27.	Σ

Απαντήσεις στις ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1.	B
2.	Γ
3.	B
4.	Δ
5.	Δ
6.	Δ
7.	Δ
8.	Γ
9.	B
10.	Γ
11.	A
12.	Γ
13.	Γ
14.	Γ

15.	B
16.	B
17.	E
18.	Γ
19.	Γ
20.	Γ
21.	Γ
22.	B
23.	A
24.	Δ
25.	E
26.	Δ
27.	Δ
28.	Δ

29.	Δ
30.	Δ
31.	A
32.	B
33.	Γ
34.	Δ
35.	E
36.	Γ
37.	B
38.	Δ
39.	Δ
40.	B
41.	B

11. Τη χρονική στιγμή t_0 σκάει το μπαλόνι. Άρα για $t > t_0$ η ποσότητα του αέρα που περιέχεται στο μπαλόνι είναι μηδέν. Επομένως αποκλείονται οι Β και Γ. Επειδή το μπαλόνι αρχίζει να φουσκώνει ενώ είναι άδειο, θα έχουμε για $t = 0$, $Q(t) = 0$, άρα η γραφική παράσταση ξεκινάει από το 0. Έτσι αποκλείεται και η Δ. Η παροχή του αέρα είναι σταθερή μέχρι τη στιγμή t_0 , άρα είναι η Α.
13. Με την ερώτηση αυτή θέλουμε να επισημάνουμε ότι για να είναι δυο συναρτήσεις ίσες, πρέπει να έχουν ίσες τιμές για κάθε x στο (κοινό) πεδίο ορισμού τους. Οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το R . Φαίνεται εύκολα ότι $f(3) = g(3) = 10$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{5}$. Αποκλείονται έτσι οι απαντήσεις Ε, Α, Β και Δ. Απομένει η Γ (δεν χρειάζεται να εξετάσουμε για τις άλλες τιμές, αφού η Δ γράφει μόνο η ΙΙΙ και έχουμε ήδη διαπιστώσει ότι ισχύει η Ι και ΙΙ).
15. Στην ερώτηση αυτή δεν μπορούμε εύκολα να αποκλείσουμε κάποιες απαντήσεις. Ο στόχος της ερώτησης είναι να «θυμηθούμε» ότι δυο συμμετρικά σημεία ως προς τον $y'y$ θα έχουν συντεταγμένες (x, y) και $(-x, y)$. Έτσι, αν στον τύπο $y = 1 - 2^x$ θέσουμε όπου x το $-x$, βρίσκουμε $y = 1 - 2^{-x}$ και η σωστή απάντηση είναι Β.
21. Η Α δεν είναι σωστή γιατί έχει πεδίο ορισμού το R , ενώ η ευθεία του σχήματος δεν ορίζεται στο $x_0 = 3$. Άρα αναζητούμε έναν τύπο συνάρτησης που να μην ορίζεται στο $x_0 = 3$ και να δίνει (μετά από ενδεχόμενη απλοποίηση) γραφική παράσταση ευθείας. Αυτός είναι ο Γ. Η ευθεία που δίνει ο τύπος Γ είναι αυτή του σχήματος, άρα αποκλείεται και η απάντηση Ε. Ο στόχος της ερώτησης είναι προφανής: Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης, βρίσκεται πριν από ενδεχόμενη απλοποίηση του τύπου.
25. Εδώ έχουμε μια ερώτηση που οι διάφορες πιθανές απαντήσεις δεν δένουν μεταξύ τους, αλλά αφορούν διαφορετικά γνωστικά αντικείμενα. Θέλοντας να μεταφέρουμε όσο το δυνατόν περισσότερες πληροφορίες από το σχήμα, ζητάμε να βρούμε αυτό που δεν ισχύει. Έτσι πρέπει να εξετάσουμε όλες τις πιθανές απαντήσεις μία προς μία. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στη σωστή απάντηση που είναι η Ε.

Απαντήσεις στις ερωτήσεις αντιστοίχισης

1.

1	β
2	η
3	γ
4	γ
5	γ
6	δ
7	ε

2.

1	δ
2	γ
3	α
4	β

3.

1	γ
---	---

4.

1	β
---	---

2	α
3	ε
4	δ

1	α
2	δ
3	ε
4	β

β) Καταρχήν αποδεικνύουμε ότι το $\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2} \in (-1, 1)$ ως εξής: Αν $|x_1| < 1$ και $|x_2| < 1$ τότε και

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2} \right| < 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 < (1 + x_1 x_2)^2 \Leftrightarrow \dots$$

Στη συνέχεια έχουμε: $f(x_1) + f(x_2) = \log \left(\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \right)$ και

$$f \left(\frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2} \right) = \log \left(\frac{1 - \frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}}{1 + \frac{x_1 + x_2}{1 + x_1 x_2}} \right) = \dots = \log \frac{(1-x_1)(1-x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)}$$

8. α) $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ **β)** $y = x^{\frac{1}{\ln x}} \Leftrightarrow \ell n y = \frac{1}{\ell n x} \ell n x = 1 \Leftrightarrow y = e$

9. α) Πρέπει $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

β) Πρέπει $0 \leq x - 4 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 5$

γ) Πρέπει $0 \leq \ln x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq e$

10. α) Για $x = y = 0$, προκύπτει $f(0) = 0$

β) Για $x = y$ έχουμε $f(2x) = 3f(x)$

Για $y = -x$, έχουμε $f(2x) = 2f(x) + f(-x)$

απ' όπου προκύπτει $f(-x) = f(x)$

γ) Αν $x \geq 0$, ισχύει

Αν $x < 0$, $f(|x|) = f(-x) = f(x)$

11. Για $x = 2$ και $x = \frac{1}{2}$ προκύπτουν δύο σχέσεις αν τις θεωρήσουμε σαν σύστημα, έχουμε $f(2) = -\frac{7}{4}$

12. $f(x) - f(4) = (x-4)(4x^2 + 9x + 55)$ με $|x| < 5$ και

$$|4x^2 + 9x + 55| \leq 4|x|^2 + 9|x| + 55 \leq 200, \text{ άρα}$$

$$|f(x) - f(4)| \leq 200 |x - 4|$$

13. α) Στο σχήμα (II) περιττή, στο σχήμα (III) άρτια και στα άλλα ούτε άρτια, ούτε περιττή

β) $g(-x) = f(-x) + f(x) = g(x)$

γ) $f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow -f(x) \geq -f(x_0) \Leftrightarrow f(-x) \geq f(-x_0)$ για κάθε x , άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $-x_0$

14. Αν $-\beta \leq x_1 < x_2 < -\alpha$, τότε $\alpha \leq -x_2 < -x_1 \leq \beta$ με $f(-x_2) < f(-x_1)$

$-f(x_2) < -f(x_1)$, άρα $f(x_2) > f(x_1)$

15. α) $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 \geq 0$

β) $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2 = f(1)$, άρα $f(x) \geq f(1)$

16. Αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) < f(x_2)$, άρα $\frac{1}{f(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)}$. Όμοια για την g .

$$\text{Επομένως } \frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{g(x_1)} > \frac{1}{f(x_2)} + \frac{1}{g(x_2)}$$

17. α) $D_f = (-3, 5]$

β) $[0, +\infty)$

δ) Παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 και στο 5. Δεν παρουσιάζει μέγιστο

$$\epsilon) f(x) = \begin{cases} 2x+6, & -3 < x \leq 2 \\ -x, & -2 < x \leq -1 \\ -\frac{1}{x}, & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{5}{3}x + \frac{25}{3}, & 2 < x \leq 5 \end{cases}$$

18. α) Μετατόπιση της C_f κατά 1 προς τα πάνω

β) Διπλασιασμός των τιμών της f

γ) Συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$

δ) Τα τμήματα της C_f πάνω από τον άξονα $x'x$ και τα συμμετρικά όσων βρίσκονται κάτω από αυτόν.

19. α) Μετατόπιση κατά 1 προς τα πάνω

β) Συμμετρική της f ως προς τον άξονα $y'y$

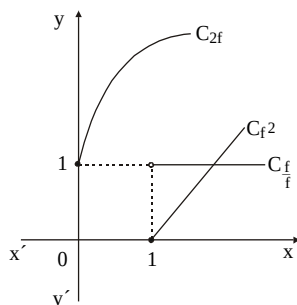
γ) Τα τμήματα κάτω από τον άξονα $x'x$ «ανεβαίνουν» συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, επάνω.

20. α) Έστω $f(x) = x^{2\kappa}$ και $g(x) = x^{2\lambda}$, $\kappa > \lambda$ (κ, λ θετικοί ακέραιοι) δύο από τις συναρτήσεις. Οι τετμημένες των κοινών σημείων θα προκύψουν από την εξίσωση $x^{2\kappa} - x^{2\lambda} = 0 \Leftrightarrow x^{2\lambda}(x^{2(\kappa-\lambda)} - 1) = 0$, άρα $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

β) Τα ίδια σημεία

21. $f_{(x)}^2 = x - 1, x \geq 1$

$$\left(\frac{f}{f}\right)(x) = 1, x > 1$$



22. Είναι περιοδική

23. α) $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$, $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

$$\beta) D_{f+g} = D_{fg} = R - \{-1, 1\} \text{ με } (f+g)(x) = \frac{x^2+x}{x^2-1}, (fg)(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\gamma) (gof)(x) = \frac{2-x}{x}, \text{ ενώ } (fg)(x) = \frac{1}{x+1}$$

δ) δεν είναι ίσες.

24. Για να ορίζεται η $f \circ f \circ f$ θα πρέπει $f(x) \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $f(f(x)) \neq 1$, που ισχύει. Άρα $f(f(f(x))) = x$ (ευθεία) με $x \neq 0$ και $x \neq 1$

25. $x^x = e^{x \cdot \ln x}$. Αν $h(x) = e^x$ και $g(x) = x \ln x$, θα είναι $f = h \circ g$

26. Γραμμική συνάρτηση ονομάζεται μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(kx_1 + \lambda x_2) = k f(x_1) + \lambda f(x_2) \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in D_f \quad (1)$$

Για τη σύνθεση έχουμε

$$(f \circ g)(kx_1 + \lambda x_2) = f(g(kx_1 + \lambda x_2)) = f((kg(x_1) + \lambda g(x_2))) =$$

$$kf(g(x_1)) + \lambda f(g(x_2)), \text{ άρα η } f \circ g \text{ είναι γραμμική}$$

Το άθροισμα επίσης, το γινόμενο όχι

Παρατηρούμε ότι η $f(x) = ax$ έχει την ιδιότητα (1)

27. α) Αν f, g γνησίως αύξουσες στο R , τότε αν $x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, άρα $f \circ g$ γνησίως αύξουσα. Ομοίως αν f, g γνησίως φθίνουσες

β) Επειδή η f έχει την ίδια μονοτονία με την f

γ) Η $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα από το (β)

28. Έστω $f(x_1) = f(x_2)$ τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$,
 άρα $f(f(x_1)) - f(x_1) = f(f(x_2)) - f(x_2)$, δηλαδή $x_1 = x_2$.

Άρα η f είναι 1-1

$$29. \alpha) f^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha}x - \frac{\beta}{\alpha} \text{ άρα } f = f^{-1} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\alpha} \text{ και } \beta = -\frac{\beta}{\alpha},$$

απ' όπου έχουμε $\alpha^2 = 1$ και $\alpha\beta + \beta = 0$, άρα $\alpha = \pm 1$ και $\beta(\alpha + 1) = 0$.

Τελικά $f(x) = x$ και $f(x) = -x + \beta, \beta \in R$

β), γ) ομοίως

30. α) $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1|x_2| + x_1 = x_2|x_1| + x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
 (περιπτώσεις ομόσημοι - ετερόσημοι)

$$\beta) \text{ Είναι } f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+x}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{x}{1-x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$31. \text{ A. } \alpha) g(x) = x + 2, D_g = \Delta \quad \beta) \varphi(x) = \frac{x}{1+2x}, D_\varphi = \Delta$$

$$\text{ B. } \alpha) f^{-1} = f \quad g^{-1} = x + 2 \quad x \in (2, +\infty) \quad h^{-1} = \frac{1-2x}{x}, x \in (0, \frac{1}{2})$$

$$\beta) (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \frac{1}{x-2} \quad x \in (2, +\infty) \quad (g^{-1} \circ f^{-1})(x) = \frac{1-2x}{x} \quad x \in (0, \frac{1}{2})$$

γ) Είναι ίσες, αφού έχουν κοινό πεδίο ορισμού και ίδιο τύπο (γενικά ισχύει $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$).

32. α) Τα τρίγωνα AMN και ABΓ είναι όμοια, άρα

$$\frac{NM}{\alpha} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow NM = \frac{\alpha(h-x)}{h}. \text{ Άρα } L(x) = 2x + 2\left(\frac{\alpha(h-x)}{h}\right) = 2\alpha + 2\left(1 - \frac{\alpha}{h}\right)x$$

β) $E(x) = NM \cdot x = \frac{\alpha(h-x)}{h} x = \alpha\left(1 - \frac{x}{h}\right)x$

33. α) $\frac{10}{x}$ και $\frac{16}{x}$ β) $\epsilon\phi\omega = \frac{6x}{x^2 + 160}$

- γ) Για να έχει το ευρύτερο οπτικό πεδίο θα πρέπει η εφω να γίνει μέγιστη. Ζητάμε το μέγιστο της παράστασης:

$$y = \frac{6x}{x^2 + 100} \Rightarrow yx^2 - 6x + 160y = 0. \text{ Θα πρέπει } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2 \leq \frac{9}{160},$$

$$\text{άρα } y_{\max} = \frac{9}{160}, \text{ για } x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \sqrt{160} \text{ m}$$

34. α) $s(t) = \sqrt{60^2 \cdot t^2 + 80^2 \cdot t^2} = 100t.$

Άρα απομακρύνονται με ταχύτητα 100 km/h

β) $AM = \frac{s}{2} = 50t$

- γ) Έστω ότι πρέπει να έχει ταχύτητα x km/h. Τότε $AM = \frac{s(t)}{2}$, άρα

$$180 = \frac{\sqrt{60^2 \cdot t^2 + x^2 \cdot t^2}}{2}. \text{ Για } t = 4, \text{ έχουμε } \sqrt{x^2 + 3 \cdot 600} = 90,$$

οπότε $x \approx 67$. Άρα ο δεύτερος πρέπει να ελαττώσει την ταχύτητά του κατά 13 km/h περίπου.

35. β) Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο για $t = -\frac{\beta}{2\alpha} = 2$ με $f(2) = 20$ m

γ) $\frac{4}{3}$ s, $\frac{8}{3}$ s δ) $10 - 5t$

36. α) Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η σύνθεση της $K(x)$ με την $N(t)$, δηλαδή: $K(t) = 15 + 800t - 40t^2$, t ακέραιος με $0 \leq t \leq 10$

β) $K(t) \leq 3.885$ και $0 \leq t \leq 10$, άρα $0 \leq t \leq 8,2$ ή $t \geq 11,8$, άρα $t = 8$

37. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 3 \\ 2.500, & 3 \leq x < 12 \\ 6.000, & x \geq 12 \end{cases}$

38. α) Αν x η θερμοκρασία σε βαθμούς Κελσίου και y σε Φαρενάιτ ζητάμε τα α, β ώστε $y = \alpha x + \beta$. Από τα δεδομένα έχουμε $32 = \alpha \cdot 0 + \beta$ και $212 = \alpha \cdot 100 + \beta$, άρα $\beta = 32$ και $\alpha = 1,8$

β) Η αντίστροφη σχέση της $y = 1,8x + 32$ είναι η $x = \frac{y - 32}{1,8}$

γ) Για $y = 1,8x + 32$ και $x = y$, προκύπτει $x = y = -40$

39. α) $f(7) = \frac{14}{7} + 4 = 6 \text{ min}$ β) Από τη 14η δοκιμή

γ) Όχι, αφού πρέπει $4 + \frac{14}{x} < 4$, με $x > 0$

40. α) $f(x) = -x + 221$ β) $f(37) = 184$

41. α) $f(7) = 19.250$ β) $f(7) - f(6) = 250$

γ) Ο πληθυσμός δεν θα ξεπεράσει τις 20.000, αφού το κλάσμα $\frac{6}{x+1}$ για μεγάλες τιμές του x γίνεται αμελητέο

42. α) $\ell = 0,0006t + 99,964$ β) 80°F

43. α) Θα πρέπει $39 - x = 40 - \frac{3}{2}x$, άρα $x = 2$ (ώρες) και $f_3(2) = f_1(2) = 37$

β) $f_1^{-1}(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{80}{3}$ άρα $f_4(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{116}{3}$.

Παρατηρούμε ότι $f_4(2) = 37,3^\circ\text{C}$, ενώ $f_1(2) = f_2(2) = f_3(2) = 37$

44. α) $E_{\text{τομέα}} = \frac{\pi R^2 x}{2\pi} = \frac{x}{2}$, $E_{\text{τριγώνου}} = \frac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \eta \mu x = \frac{1}{2} \eta \mu x$,

άρα $E(x) = \frac{1}{2}(x - \eta \mu x)$

β) $H(x) = \frac{\pi}{2} - E(x)$

45. α) Η τεταγμένη του M ισούται με $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ (διάμεσος)

άρα $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$

β) $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 < \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \geq 0$, ισχύει

γ) $e^{\frac{x_1 + x_2}{2}} < \frac{e^{x_1} + e^{x_2}}{2} \Leftrightarrow 4e^{x_1 + x_2} < (e^{x_1} + e^{x_2})^2 \Leftrightarrow (e^{x_1} - e^{x_2})^2 \geq 0$, ισχύει