



Η "στροφή" των θεμάτων στα Μαθηματικά των πανελλαδικών εξετάσεων 2016-2019

Του Δ. Σπαθάρα, τ. Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Η "στροφή" των θεμάτων.

Το 2016 επιχειρήθηκε μια σημαντική βελτίωση των θεμάτων στα Μαθηματικά των Πανελλαδικών εξετάσεων, ώστε να είναι πιο ουσιαστικά και επικεντρωμένα στο σχολικό βιβλίο. Το 2017 είχαμε περαιτέρω βελτίωση στο ίδιο πνεύμα. Έτσι η εκπαιδευτική κοινότητα προσαρμόστηκε σιγά σιγά και πείστηκε ότι αυτή είναι μια μόνιμη κατάσταση. Το 2018 τα θέματα ακολούθησαν το ίδιο πνεύμα. Αυτή τη φορά θεωρήθηκαν φυσιολογικά και αναμενόμενα. Το 2019 η βελτίωση υπήρξε σημαντική που πολλοί συνάδελφοι έσπευσαν να δώσουν συγχαρητήρια στην επιτροπή θεμάτων.

Όλα αυτά τα χρόνια, από το 2016 και μετά, τα θέματα έλαβαν υπ' όψη το σχολικό βιβλίο και δεν το απαξίωσαν. Έδωσαν την ευκαιρία να αξιοποιηθεί αυτό που διάβασαν τα παιδιά. Αν ζητούσαν κάτι επιπλέον αυτό σχετιζόνταν άμεσα με την μελέτη που αρμόζει σε αυτές τις εξετάσεις. Τα θέματα, παρόλο δεν ήταν προσιτά σε όλους, απέφυγαν τους γρίφους, τα τεχνάσματα, τις εμπνεύσεις της στιγμής και τις διάφορες σοφιστείες. Αρκετές φορές επιδέχονταν πολλές και διαφορετικές προσεγγίσεις. Είναι ο αξιοσημείωτο ότι δεν εμφανίστηκαν τα θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής και τα περιβόητα «ξ». Τα θεωρήματα αυτά δεν εμφανίζονται στις αντίστοιχες εξετάσεις καμιάς χώρας του κόσμου. Επίσης εξέλειπε το "συνδυαστικό" παραλήρημα όπου μια άσκηση φορτώνονταν με πολλά ετερόκλητα δεδομένα δημιουργώντας μια τερατογέννηση. Εξέλειπε η συνάρτηση ολοκλήρωμα και οι πολύπλοκες διαφορικές εξισώσεις.

Ακτινογραφία των θεμάτων από το 2017 και μετά.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια το μέρος των εκφωνήσεων που αφορά τη δοσμένη συνάρτηση σε κάθε θέμα από το 2017 και μετά. Είναι σημαντικό να τονίσουμε εδώ ότι οι συναρτήσεις στις εκφωνήσεις των θεμάτων Β, Γ και Δ ήταν συγκεκριμένες και με δεδομένο τον τύπο τους. Δηλαδή δεν ήταν αφηρημένες συναρτήσεις όπου δίνονταν κάποιες ιδιότητές τους και με βάση αυτές ζητούσαν άλλες ιδιότητές τους.

Θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων του 2017

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$

Θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων του 2018

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x-\alpha} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\alpha > 1$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων του 2019

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1. \end{cases}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = (x-1) \ln(x^2 - 2x + 2) + \alpha x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $(\varepsilon): y = -x + 2$, η οποία εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1, 1)$.

Σχέσεις μεταξύ συναρτήσεων.

Στο θέμα Γ των επαναληπτικών εξετάσεων του 2019 δεν δόθηκε ο τύπος της συνάρτησης αλλά μια απλή σχέση αυτής με την παράγωγό της (απλή διαφορική εξίσωση). Όμως στο ερώτημα Γ1 δινόταν το τύπος της συνάρτησης ο οποίος έπρεπε να αποδειχθεί. Αν κάποιος μαθητής δεν αποδείκνυε το τύπο της συνάρτησης αυτός ήταν γνωστός, ώστε να απαντηθούν τα επόμενα ερωτήματα.

Θέμα Γ των επαναληπτικών εξετάσεων του 2019**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) \cdot f'(x) = \frac{1}{2} \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και της οποίας η γραφική παράσταση } C_f$$

διέρχεται από το σημείο $M(1, 1)$. Έστω το σημείο $A(\frac{3}{2}, 0)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$.

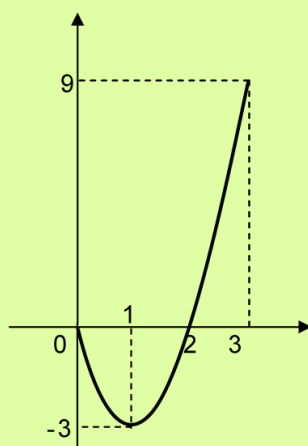
Γραφικές παραστάσεις.

Στο θέμα Γ των επαναληπτικών εξετάσεων του 2017 δόθηκε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f' και κάποια άλλα δεδομένα. Οι μαθητές έπρεπε να αντλήσουν στοιχεία από τη γραφική παράσταση ώστε να απαντήσουν στα ερωτήματα του θέματος.

Θέμα Γ των επαναληπτικών εξετάσεων του 2017**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0, 3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:

- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- $f(0) = 2$, $f(1) = 0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ τη γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0, 3]$.

Προβλήματα.

Το θέμα Β των επαναληπτικών εξετάσεων του 2017 και το θέμα Γ των εξετάσεων του 2018 ήταν προβλήματα, παρόμοια με αυτά που έχει το σχολικό βιβλίο. Τα προβλήματα αφορούσαν εμβαδά και το μέγιστο-ελάχιστο αυτών. Στο πρώτο στάδιο δίνονταν ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το υπό μελέτη εμβαδόν και έπρεπε να αποδειχθεί. Αν κάποιος μαθητής δεν αποδείκνυε το τύπο της συνάρτησης αυτός ήταν γνωστός, ώστε να απαντηθούν τα επόμενα ερωτήματα.

Θέμα Β των επαναληπτικών εξετάσεων του 2017

ΘΕΜΑ Β

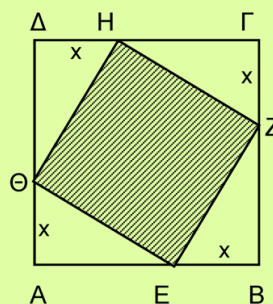
Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:

Β1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x .

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$$



Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Μονάδες 9

Β4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in [0, 2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_0)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_0} + 1 \text{ cm}^2$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ των πανελλαδικών εξετάσεων 2018

ΘΕΜΑ Γ

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8 m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8).$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8 m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με 5 m^2 .

Μονάδες 10

Θεώρημα Bolzano.

Στο θέμα Β των πανελλαδικών εξετάσεων του 2019 έχουμε μια απλή εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano.

Θέμα Β των πανελλαδικών εξετάσεων του 2019

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2, 3)$.

Μονάδες 7

Θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής.

Τα θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής εμφανίστηκαν μόνο στις επαναληπτικές εξετάσεις στο οποία ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν αν πληρούνται οι προϋποθέσεις τους. Σε κάθε περίπτωση κατονομάζεται το αντίστοιχο θεώρημα και δεν ζητείται το συμπέρασμα άμεσα ή έμμεσα. Δεν υπήρξε κάποιο θέμα που έπρεπε οι μαθητές να σκεφτούν ότι χρειάζεται εφαρμογή κατάλληλου τέτοιου θεωρήματος και να αναλάβουν πρωτοβουλία και το εφαρμόσουν.

Θέμα Β των επαναληπτικών εξετάσεων του 2019

B4. Έστω η συνάρτηση

$$\varphi(x) = \begin{cases} (g \circ f)(x), & x \in A \\ 1 - x^2, & x \in (-1, 1) \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x) = \varphi(x) \cdot \eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 8

Θέμα Β των επαναληπτικών εξετάσεων του 2018

B2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 4]$.

Θέμα Δ των επαναληπτικών εξετάσεων του 2017

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f στο διάστημα $[0, 2]$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής.

Τελικά τι εννοούμε όταν λέμε "στροφή" των θεμάτων;

Μετά την παραπάνω μελέτη μπορούμε να συνοψίσουμε στα σπουδαιότερα σημεία που διαφοροποιούν τα θέματα από τα προηγούμενα έτη.

- Στις εκφωνήσεις των θεμάτων Β, Γ και Δ οι δοσμένες συναρτήσεις ήταν συγκεκριμένες και με δεδομένο τον τύπο τους. Δεν ήταν αφηρημένες συναρτήσεις που δίνονταν κάποιες ιδιότητές τους και με βάση αυτές ζητούσαν άλλες ιδιότητές τους.
- Έχουν τεθεί θέματα όπου δίνεται η γραφική παράσταση της f ή της f' και από τη γραφική παράσταση εξάγονται στοιχεία για την απάντηση στα ερωτήματα του θέματος.

- Έχουν τεθεί προβλήματα μέγιστου-ελάχιστου στα οποία πρέπει πρώτα να αποδειχθεί ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το μεταβαλλόμενο μέγεθος.
- Έχουν τεθεί απλές εφαρμογές του θεωρήματος Bolzano.
- Έχει ζητηθεί να εξεταστεί αν πληρούνται οι υποθέσεις των θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής. Δεν έχει ζητηθεί το συμπέρασμα των θεωρημάτων άμεσα ή έμμεσα. Δεν έχουν ζητηθεί τα περιβόητα "ξ".

Με ποιο θέμα του παρελθόντος δεν μοιάζουν τα νέα θέματα;

Θέμα Δ των πανελλαδικών εξετάσεων 2009

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, 2]$ για την οποία ισχύει

$$\int_0^2 (t-2)f(t)dt = 0$$

Ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$H(x) = \int_0^x t f(t)dt, \quad x \in [0, 2],$$

$$G(x) = \begin{cases} \frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3, & x \in (0, 2] \\ 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-t^2}}{t^2}, & x = 0 \end{cases}$$

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$.

Μονάδες 5

- β.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$ και ότι ισχύει

$$G'(x) = -\frac{H(x)}{x^2}, \quad 0 < x < 2$$

Μονάδες 6

- γ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha \in (0, 2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha) = 0$.

Μονάδες 7

- δ.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha \int_0^\xi t f(t)dt = \xi^2 \int_0^\alpha f(t)dt$$

Μονάδες 7

Οι προτάσεις μας για την προετοιμασία ενόψει των εξετάσεων του 2020.

Στα παραπάνω δεν αναφερθήκαμε στο θεώρημα Fermat. Μια ήπια εκδοχή του παρουσιάζουμε στο παρακάτω θέμα μαζί με άλλα ερωτήματα.

ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \lambda x^2 - \lambda^2 x - 3x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία -1 και 1 .

A) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

B) Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x)}{\eta\mu(f(x))}$.

Δ) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Καθώς το M διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 5 cm/sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \angle M\hat{O}x$ που σχηματίζει η OM με τον θετικό ημιάξονα Ox τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από το σημείο A .

Στην εγκύκλιο 143431/Δ2/16-09-2019 που αφορά τη διαχείριση της εξεταστέας-διδασκτέας ύλης αναφέρεται ότι:

Η έννοια της συνάρτησης είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη γραφική της παράσταση και η σύνδεση αυτή πρέπει να αναδεικνύεται σε κάθε ευκαιρία, διότι υποστηρίζει την κατανόηση των χαρακτηριστικών της συνάρτησης.

Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι που υποστηρίζουν την κατανόηση των χαρακτηριστικών μιας συνάρτησης. Παρουσιάζουμε στη συνέχεια μια ακόμη ιδέα.

ΘΕΜΑ

Στο διπλανό πίνακα φαίνονται η μονοτονία, τα ακρότατα και τα όρια στο $-\infty$ και στο $+\infty$ μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$. Επιπλέον δίνεται ότι η f έχει ρίζες τους αριθμούς -2 και

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	4	-3 min	4

A) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .

Γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $g(x) = \mu$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ .

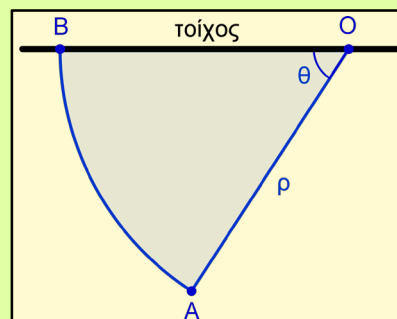
Για την παράγραφο 2.7 η εγκύκλιος 143431/Δ2/16-09-2019 που αφορά τη διαχείριση της εξεταστέας-διδακτέας ύλης αναφέρει:

Τα προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων αποτελούν μία από τις σημαντικές εφαρμογές του διαφορικού λογισμού που δικαιολογούν και αποδίδουν αξία στη διδασκαλία του. Συγχρόνως, συγκεντρώνουν στοιχεία από τη διδασκαλία προηγούμενων εννοιών και έτσι αποτελούν μια καλή ευκαιρία επαναλήψεων και συμπληρώσεων. Κρίνεται σκόπιμο να συζητηθούν κατά το δυνατόν περισσότερα προβλήματα.

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια ένα πρόβλημα μέγιστου-ελάχιστου. Σχετική είναι η άσκηση 6 της Γ' ομάδας στη σελίδα 173 του σχολικού βιβλίου.

ΘΕΜΑ

Θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν μεταλλικό εξώστη σχήματος κυκλικού τομέα $\widehat{OAB}$ με ακτίνα $OA = \rho$ m και γωνία $\theta = \widehat{AOB}$ rad, το οποίο θα στηρίξουμε σε έναν τοίχο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Διαθέτουμε για την περίμετρο μη συμπεριλαμβανομένης της ακτίνας OB , δηλαδή για το άθροισμα $OA + \widehat{AB}$, ακριβώς 10 m μεταλλικά κάγκελα για το έργο αυτό.



- A)** Να αποδείξετε ότι ο εξώστης έχει εμβαδόν E σε m^2 , συναρτήσει της ακτίνας ρ , που είναι:

$$E(\rho) = 5\rho - \frac{\rho^2}{2}, \quad 0 < \rho < 10$$

- B)** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E μεγιστοποιείται όταν το μήκος του τόξου $\widehat{AB}$ είναι ίσο με το μήκος της ακτίνας OA .
- Γ)** Να βρείτε γωνία θ όταν το εμβαδόν E γίνεται μέγιστο.
- Δ)** Όταν κατασκευάστηκε και τοποθετήθηκε ο εξώστης μέγιστου εμβαδού άρχισε να διαστέλλεται επιφανειακά από τη θερμοκρασία του ήλιου. Με την επιφανειακή διαστολή το σχήμα του παραμένει όμοιο με το αρχικό και η επιφάνειά του, τη χρονική στιγμή που η ακτίνα είναι 5 m, αυξάνεται με ρυθμό $0,1 \text{ cm}^2/\text{min}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της ακτίνας ρ σε cm/min τη χρονική στιγμή που αυτή είναι 5 m.

Τα θέματα του διαδικτύου.

Στο διαδίκτυο όλοι μιλούν για τη "στροφή" των θεμάτων. Υπάρχει υπερπληθώρα θεμάτων που ανεβαίνουν καθημερινά. Επίσης υπάρχουν πολλά βοηθήματα με επαναληπτικά θέματα προετοιμασίας για τις εξετάσεις. Πολλές φορές όμως τα θέματα αυτά δεν ανταποκρίνονται πλήρως στα νέα δεδομένα. Έτσι παρόλο που επαγγέλλονται το νέο πέφτουν στην παγίδα του παλαιού.

Στα θέματα του διαδικτύου έχει εκλείψει η συνάρτηση ολοκλήρωμα, έχουν περιοριστεί οι διαφορικές εξισώσεις και τα υπαρκτικά θεωρήματα, αλλά δε φτάνουν μόνο αυτά. Οι εκφωνήσεις πολλές φορές αναφέρονται σε μια συνάρτηση χωρίς να δίνεται ο τύπος της αλλά ορισμένες ιδιότητές της και πολλά ετερόκλητα δεδομένα.

Πιστεύουμε ότι τα θέματα στα οποία θα κληθούν να απαντήσουν οι υποψήφιοι θα είναι ανθρώπινα. Οι θεματοδότες δεν θα προσπαθήσουν να βρουν παράξενα και ασυνήθιστα θέματα για να παγιδεύσουν τους υποψήφιους. Με τα θέματα θα θελήσουν να ελέγξουν την κατανόηση βασικών εννοιών των σπουδαιότερων συμπερασμάτων και στη συνέχεια, κυρίως στο θέμα Δ, την ικανότητα συνδυασμού και σύνθεσης των προηγούμενων γνώσεων. Συνεπώς ηρεμία, αυτοσυγκέντρωση, αποφυγή εξεζητημένων ασκήσεων, άριστη γνώση της θεωρίας και προσοχή στους καθηγητές, είναι βασικά στοιχεία που θα πρέπει να συνοδεύουν την προσπάθεια των μαθητών.

Καλή επιτυχία στις εξετάσεις.