5ο ΓΕΛ ΗΛΙΟΥΠΟΛΗΣ, 27/11/2024

Διαγώνισμα Α΄ τετραμήνου στα Μαθηματικά Προσανατολισμού. **Γ-ΓΟΠ-1**

Διδάσκων: Χρυσανθόπουλος Κώστας

Ονοματεπώνυμο: ____________________

<u>ΘΕΜΑ Α</u> **(μονάδες 25)**

1. Να αποδείξετε ότι αν f είναι μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα [α, β] και η ένας αριθμός μεταξύ του $f(\alpha)$ και του $f(\beta)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \eta$. **(μονάδες 15)**

   ΣΧΟΛΙΚΟ, σελ. 76

2. Να χαρακτηρίσετε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις ως <u>Σωστή</u> ή <u>Λάθος</u>

(5 x 2 = 10 μονάδες)

Λ i. Αν $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο x_o, τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$ (σχ. σελ. 47)

Σ ii. Μια συνάρτηση θα είναι 1 – 1 αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη. (σχ. σελ. 34)

Λ iii. Αν μια συνεχής συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα [α, β], τότε θα έχει πάντα για σύνολο τιμών ένα κλειστό διάστημα. (σχ. σελ. 76)

Λ iv. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_o, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι κι αυτή συνεχής στο x_o. (σχ. σελ. 72)

Λ v. Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \to 0} \log_a x = 1$ (σχ. σελ. 67)

ΘΕΜΑ Β **(μονάδες 35)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}-\ln(x+1)$.

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (μονάδες 5)
2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1}. (μονάδες 8)
3. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία y = x σε ένα, ακριβώς, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-1,1)$. (μονάδες 10)
4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(e^a-1)-1}{x-1}-\frac{f(|\eta\mu a|)-f(a)}{x-2}=2024$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2), για κάθε α > 0. (μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ **(μονάδες 40)**

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x)+2f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1 και να βρείτε την αντίστροφή της. (μονάδες 6)
2. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x. (μονάδες 5)
3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (μονάδες 7)
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_o=-1$. (μονάδες 10)
5. Να βρείτε το πρόσημο της f και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-5,-3)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(a)}{\xi+5}+\frac{f(a)+1}{\xi+3}=2024$ με α > 0. (μονάδες 12)

ΓΟΠ – 1

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΩΡΙΑΙΟΥ Α' ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ

ΘΕΜΑ Β

1) $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1)$ πρεπει $x+1>0 \Rightarrow x>-1$, $D=(-1,+\infty)$

Για $x_1, x_2 \in D$ με $x_1<x_2 \Rightarrow -x_1>-x_2 \overset{e^x}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} e^{-x_1}>e^{-x_2}$

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \overset{\ln}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} \ln(x_1+1)<\ln(x_2+1) \Rightarrow -\ln(x_1+1)>-\ln(x_2+1)$ $\Big\}\overset{+}{\Rightarrow}$

$e^{-x_1}-\ln(x_1+1) > e^{-x_2}-\ln(x_2+1) \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$. Αρα $f \downarrow$ γν. φθιν.

2) Αφού $f\downarrow$ αρα f 1-1, άρα αντιστρεφεται ⟹ γνωρίζουμε ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το σύνολο τιμών της f.

Αρα $D_{f^{-1}} = f(D) = f((-1,+\infty)) \underset{\downarrow}{\overset{f\,\sigma\upsilon\nu}{=}} \left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)\right) = \mathbb{R}$ διότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}-\ln(x+1)\right) = 0-(+\infty) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(e^{-x}-\ln(x+1)\right) = e-(-\infty) = e+\infty = +\infty$

3) Αρκεί δείξω μοναδική λύση στην εξίσωση $f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow$

$f(f^{-1}(x)) = f(x) \Leftrightarrow x=f(x) \Leftrightarrow x = e^{-x}-\ln(x+1) \Leftrightarrow$

$x-e^{-x}+\ln(x+1)=0$ Θέτω $g(x) = x-e^{-x}+\ln(x+1)$, $x>-1$

Η g συνεχής στο $(-1,+\infty)$ ως πράξη συνεχών, άρα ⟹ στο $(-1,1)\subseteq(-1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+}\left(x-e^{-x}+\ln(x+1)\right) = -1-e-\infty = -\infty$

Αρα η $g(x)<0$ κοντα στο -1^+, δηλαδή υπαρχει αριθμος α κοντα μα δεξια του -1 ώστε $g(a)>0$

$g(1) = 1-e^{-1}+\ln 2 = 1-\frac{1}{e}+\ln 2 = \frac{e-1}{e}+\ln 2>0$ διοτι:

$e>2 \Rightarrow e-1>1 \Rightarrow \frac{e-1}{e}>0$ επισης $2>1 \Rightarrow \ln 2>\ln 1=0$

Αρα για την g ισχυούν οι προϋποθέσεις του Θ.Β για το διαστημα $[\alpha,1]\subseteq(-1,1]$ οποτε υπαρχει τουλάχιστον ενα $x_0\in(\alpha,1)\subseteq(-1,1)$ ωστε $g(x)=0$

Θα μελετήσουμε τη μονοτονία της g ωστε να δείξουμε τη μοναδικοτητα της ρίζας

$g(x) = x - f(x)$

$x_1 < x_2 \xrightarrow[\downarrow]{f} f(x_1) > f(x_2) \Longrightarrow \left.\begin{matrix} -f(x_1) < -f(x_2) \\ x_1 < x_2 \end{matrix}\right\} \xRightarrow{+}$

$g(x_1) < g(x_2)$ άρα $g \uparrow$ κι άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική

4) $\dfrac{f(e^a-1)-1}{x-1} - \dfrac{f(\ln|a|)-f(a)}{x-2} = 2024 \iff$

$\cancel{(x-1)}(x-2)\dfrac{f(e^a-1)-1}{\cancel{x-1}} - (x-1)\cancel{(x-2)}\dfrac{f(\ln|a|)-f(a)}{\cancel{x-2}} = 2024(x-1)(x-2) \iff$

$(x-2)\big(f(e^a-1)-1\big) - (x-1)\big(f(\ln|a|)-f(a)\big) - 2024(x-1)(x-2) = 0$

Θέτω $h(x) = (x-2)\big(f(e^a-1)-1\big) - (x-1)\big(f(\ln|a|)-f(a)\big) - 2024(x-1)(x-2)$

[Η h έχει νόημα κι ορίζεται διότι $e^a > 0 \Rightarrow e^a - 1 > -1$ άρα ανήκει στο D_f. Επίσης $\ln|a| \geq 1 > -1$ κι αυτό ορίζεται κι $f(a)$ ορίζεται, $a > 0$.]

Η h συνεχής ως πράξη συνεχών

$h(1) = -\big(f(e^a-1)-1\big) > 0$ διότι:

$a > 0 \Rightarrow e^a > e^0 = 1 \Rightarrow e^a - 1 > 0 \xrightarrow[\downarrow]{f} f(e^a-1) < f(0) \Rightarrow$

$f(e^a-1) < 1 \Rightarrow f(e^a-1) - 1 < 0 \Rightarrow -\big(f(e^a-1)-1\big) > 0$

$h(2) = -\big(f(\ln|a|)-f(a)\big) < 0$ διότι:

$\ln|a| \leq |a| \overset{a>0}{\underset{a\neq 0}{=}} a \Rightarrow \ln|a| < a \xrightarrow[\downarrow]{f} f(\ln|a|) > f(a) \Rightarrow$

$f(\ln|a|) - f(a) > 0 \Rightarrow -\big(f(\ln|a|)-f(a)\big) < 0$

Άρα για την h ισχύουν προϋποθ. Θ-Β για το $[1,2]$, οπότε υπάρχει τουλάχ. 1 ρίζα $x_0 \in (1,2)$ της $h(x) = 0 \iff$

$\dfrac{\cancel{(x-2)}\big(f(e^a-1)-1\big)}{(x-1)\cancel{(x-2)}} - \dfrac{\cancel{(x-1)}\big(f(\ln|a|)-f(a)\big)}{\cancel{(x-1)}(x-2)} = \dfrac{2024\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x-2)}} \iff$

$\dfrac{f(e^a-1)-1}{x-1} - \dfrac{f(\ln|a|)-f(a)}{x-2} = 2024.$

ΘΕΜΑ Γ

1) Εστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1)=f^3(x_2)$
$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1)=2f(x_2)$ $\Big\} \Rightarrow$

$f^3(x_1)+2f(x_1)=f^3(x_2)+2f(x_2) \Rightarrow x_1+1=x_2+1 \Rightarrow x_1=x_2$

Αρα f 1-1 κι άρα αντιστρέφεται.

Αφού $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα για $x,y \in \mathbb{R}$ ισχυει $f(x)=y \Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$ Αρα

$y^3+2y=x+1 \Leftrightarrow x=y^3+2y-1$ Αρα $f^{-1}(x)=x^3+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$

2) Σημειο τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, άρα λυση της εξίσωσης $f(x)=0 \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=f^{-1}(0) \Leftrightarrow x=f^{-1}(0) \Leftrightarrow$ $x=-1$. Αρα το σημείο είναι το $A(-1,0)$

3) Θεωρώ την $g(x)=x^3+2x$ με $x\in\mathbb{R}$

$x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3$
$x_1<x_2 \Rightarrow 2x_1<2x_2$ $\Big\} \overset{+}{\Rightarrow} g(x_1)<g(x_2)$ Αρα $g \uparrow$

Οπότε αν πάρω $x_1<x_2 \Rightarrow x_1+1<x_2+1 \Rightarrow$

$f^3(x_1)+2f(x_1) < f^3(x_2)+2f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1))<g(f(x_2)) \xRightarrow[\uparrow]{g}$

$f(x_1)<f(x_2)$ Αρα η $f \uparrow$

[Σημείωση: αυτό μπορούσαμε να το κάνουμε κι στο 1º ερώτημα κι από εδώ να πούμε ότι f 1-1, άρα αντιστρέφεται]

4) $f^3(x)+2f(x)=x+1 \Rightarrow f(x)(f^2(x)+2)=x+1 \Rightarrow$

$f(x)=\dfrac{x+1}{f^2(x)+2}$

$2+f^2(x)>1$ οπότε $\dfrac{1}{2+f^2(x)}<1$. Αρα:

$|f(x)|=\left|\dfrac{x+1}{f^2(x)+2}\right| = |x+1|\left|\dfrac{1}{2+f^2(x)}\right| \leq |x+1|\cdot 1=|x+1|$

άρα

$|f(x)|\leq|x+1| \Rightarrow -|x+1|\leq f(x)\leq|x+1|$

Αλλα $\lim_{x\to-1}(-|x+1|)=\lim_{x\to-1}|x+1|=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής κι $\lim_{x\to-1}f(x)=0$

Απο $f^3(x)+2f(x)=x+1 \xLeftrightarrow{x=-1} f^3(-1)+2f(-1)=0 \Leftrightarrow$

$f(-1)(f^2(-1)+2)=0 \Leftrightarrow f(-1)=0$ ή $f^2(-1)+2=0$ άτοπο

Άρα $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)=0$ οπότε η f συνεχής στο $x_0=-1$

5) Έχουμε δείξει στο (3) ότι $f \uparrow$ κ στο (2) ότι $f(-1)=0$

Άρα για $x<-1 \overset{f}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} f(x)<f(-1) \Leftrightarrow f(x)<0$

κ για $x\geq -1 \overset{f}{\underset{\uparrow}{\Leftrightarrow}} f(x)\geq f(-1) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$

$$\frac{f(a)}{\xi+5}+\frac{f(a)+1}{\xi+3}=2024 \Leftrightarrow$$

$$(\cancel{\xi+5})(\xi+3)\frac{f(a)}{\cancel{\xi+5}}+(\cancel{\xi+5})(\cancel{\xi+3})\frac{f(a)+1}{\cancel{\xi+3}}=2024(\xi+5)(\xi+3)$$

$$(\xi+3)f(a)+(\xi+5)(f(a)+1)-2024(\xi+5)(\xi+3)=0$$

Θέτω $h(x)=(x+3)f(a)+(x+5)(f(a)+1)-2024(x+5)(x+3)$

συνεχής στο $[-5,-3]\subseteq\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών.

$h(-5)=-2f(a)<0$ διότι

$a>0>-1 \overset{f}{\underset{\uparrow}{\Rightarrow}} f(a)>f(0)>f(-1)=0 \Rightarrow f(a)>0$

$h(-3)=2(f(a)+1)>0$ διότι όπως είδαμε $f(a)>0$.

Άρα για την h ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ-Β, οπότε

υπάρχει τουλάχ. ένα $\xi_0\in(-5,-3)$ ώστε $h(\xi)=0 \Leftrightarrow$

$$(\xi+3)f(a)+(\xi+5)(f(a)+1)=2024(\xi+5)(\xi+3) \quad \underset{\xi\neq-3}{\overset{\xi\neq-5}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{(\cancel{\xi+3})f(a)}{(\cancel{\xi+3})(\xi+5)}+\frac{(\cancel{\xi+5})(f(a)+1)}{(\cancel{\xi+5})(\xi+3)}=\frac{2024(\cancel{\xi+5})(\cancel{\xi+3})}{(\cancel{\xi+5})(\cancel{\xi+3})} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(a)}{\xi+5}+\frac{f(a)+1}{\xi+3}=2024.$$