

Ονοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ Α (Μονάδες 30)

Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις γράφοντας δίπλα τη λέξη **Σωστή** ή **Λάθος**. Αν χαρακτηρίσετε μια πρόταση ως Λάθος να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $x'x$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
3. Το να είναι μια συνάρτηση f $1-1$ σημαίνει ότι αν $x_1 = x_2$ θα ισχύει και $f(x_1) = f(x_2)$.
4. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A και η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο B , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο $A \cap B$.
5. Για να είναι δύο συναρτήσεις f και g ίσες πρέπει να έχουν κοινό πεδίο ορισμού A και να ισχύει ότι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

ΘΕΜΑ Β (Μονάδες 35)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)
2. Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $\varepsilon: y = x$. (Μονάδες 8)
3. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^5 + 2x - 2) - x^5 > x$. (Μονάδες 9)
4. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(e^{x+1}) - f^{-1}(34)) = 0$. (Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ Γ (Μονάδες 35)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = e^x$.

1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$. (Μονάδες 9)
2. Αν $h(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$ με $x > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφή της. (Μονάδες 11)
3. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $h(x) = \eta\mu x$, $x > 0$, έχει λύσεις. (Μονάδες 8)
4. Έστω $M(a, a)$, $a > 1$, το σημείο τομής της C_h με την ευθεία $y = x$. Να αποδείξετε ότι $a = \ln f(a)$. (Μονάδες 7)

Ονοματεπώνυμο: _____

ΘΕΜΑ Α (Μονάδες 30)

Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις γράφοντας δίπλα τη λέξη **Σωστή** ή **Λάθος**. Αν χαρακτηρίσετε μια πρόταση ως Λάθος να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

1. Κάθε συνάρτηση f που είναι $1-1$ είναι και γνησίως μονότονη.
2. Αν η συνάρτηση f είναι $1-1$, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x) = y$ έχει μία τουλάχιστον λύση ως προς x .
3. Αν για δύο συναρτήσεις f και g ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε ισχύει πάντοτε $f \circ g = g \circ f$.
4. Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο A και η συνάρτηση g έχει πεδίο ορισμού το σύνολο B , τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ ορίζεται στο σύνολο $A \cap B$.
5. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ Β (Μονάδες 35)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) + 3e^{f(x)} = x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 9)
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 7)
3. Να βρείτε το διάστημα όπου η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$. (Μονάδες 8)
4. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < f(x^2) - f(x + 2)$. (Μονάδες 11)

ΘΕΜΑ Γ (Μονάδες 35)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e^{-x} + x$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 6)
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα και περιττή. (Μονάδες 11)
3. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2f^{-1}(x)} - 1 = (f(x) - f^{-1}(x)) \cdot e^{f^{-1}(x)}$. (Μονάδες 8)
4. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x - 2) + f^{-1}(x - 4) > f(3 - x)$. (Μονάδες 10)