Τάξη: Γ΄ Επαναληπτικά Θέματα - Διαφορικού Λογισμού

Κώστα Βακαλόπουλου

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$.

Α) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$ και να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες (αν υπάρχουν) και το σύνολο τιμών της f

Γ) i) Να βρείτε το πλήθος και το πρόσημο των λύσεων της εξίσωσης: $f(x)=2023$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x(x\alpha-1)=\alpha$ για $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις.

Δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f

Ε) Να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2,f(2))$ και να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}+1924}{9f(x)+5x-16}$

ΣΤ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ ισχύει: $2f(x)>f(2x)$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}-\{-1,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Α) Έχουμε: $f'(x)=\ldots=-\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

Επειδή η f είναι συνεχής, η f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα: $A_1=(-\infty,-1)$, $A_2=(-1,1)$, $A_3=(1,+\infty)$

Η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Επίσης έχουμε: $f''(x)=\ldots=\dfrac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$.

Το πρόσημο της $f''(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$
$(x^2-1)^3$	$+$	‖	$-$		$-$	‖	$+$
$f''(x)$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$
f	∩	‖	∪	Σ.Κ.	∩	‖	∪

Επομένως η f είναι κοίλη στα διαστήματα: $(-\infty,-1)$, $[0,1)$ και κυρτή στα διαστήματα: $(-1,0]$, $(1,+\infty)$ ενώ το σημείο $(0,f(0)=0)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης C_f της f.

Β) Κατακόρυφες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}\right)=-\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{1}{x+1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$.

Όμοια

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^+}\left(\frac{1}{x+1}\cdot\frac{x}{x-1}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{1}{x+1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}$.

Άρα η ευθεία $x=-1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη C_f. Επίσης:

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}\right)=-\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

Όμοια

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x}{x+1}\right)=+\infty$$

αφού $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{1}{2}$.

Άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη στη C_f.

Οριζόντιες ασύμπτωτες:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στη C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ Οπότε δεν έχει πλάγιες ασύμπτωτες.

Για το σύνολο τιμών έχουμε:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $A_1=(-\infty,-1)$ και συνεχής οπότε,
$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-1^-}f(x),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=(-\infty,0)$$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα κα συνεχής στο διάστημα $A_2=(-1,1)$ και συνεχής οπότε,
$$f(A_2)=\left(\lim_{x\to1^-}f(x),\lim_{x\to-1^+}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)$$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $A_3=(1,+\infty)$ και συνεχής οπότε,
$$f(A_3)=\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1^+}f(x)\right)=(0,+\infty)$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

Γ) i)

- $2023\notin f(A_1)=(-\infty,0)$, άρα δεν υπάρχει $x\in(-\infty,-1)$ τέτοιος, ώστε $f(x)=2023$
- $2023\in f(A_2)=(-\infty,+\infty)$, άρα υπάρχει ένα $x_1\in(-1,1)$ και μάλιστα μοναδικό τέτοιο, ώστε $f(x_1)=2023$. (Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ άρα και «1-1»). Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ και $f(0)=0$, οπότε $x_1<0$
- $2023\in f(A_3)=(0,+\infty)$, άρα υπάρχει και μάλιστα ακριβώς ένα $x_2\in(1,+\infty)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2)=2023$. Προφανώς $x_2>0$. (Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ άρα και «1-1»).

ii) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{\pm1\}$ και $\alpha<0$ ισχύει:

$$x(x\alpha-1)=\alpha\Leftrightarrow \alpha x^2-\alpha=x\Leftrightarrow \alpha(x^2-1)=x\Leftrightarrow$$

$\alpha=\dfrac{x}{x^2-1}\Leftrightarrow f(x)=\alpha$, (1). Επειδή το σύνολο ορισμού της εξίσωσης $x(x\alpha-1)=\alpha$ είναι το $\mathbb{R}$ εξετάζουμε πρώτα αν έχει ρίζες τους αριθμούς 1 ή -1. Όμως: $-1(-\alpha-1)=\alpha\Rightarrow1=0$, άτοπο και $1(\alpha-1)=\alpha\Rightarrow-1=0$, άτοπο. Άρα δεν έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -1. Οπότε λόγω της ισοδυναμίας (1) αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=\alpha$ με $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις. Για κάθε $\alpha<0$ ισχύει ότι:

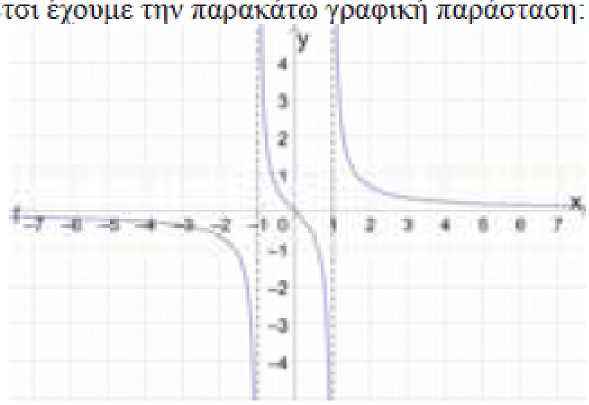
- $\alpha\in f(A_1)=(-\infty,0)$, άρα υπάρχει και μάλιστα ακριβώς ένα $x_1\in(-\infty,-1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\alpha$. Προφανώς $x_1<0$.
(Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1)$ άρα και «1-1»).
- $\alpha\in f(A_2)=(-\infty,+\infty)$ άρα υπάρχει και μάλιστα ακριβώς ένα $x_2\in(-1,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=\alpha$. (Η μοναδικότητα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,1)$ άρα και «1-1»). Για να διαπιστώσουμε το πρόσημο του x_2 θα βρούμε το σύνολο τιμών σε καθένα από τα διαστήματα $A=(-1,0]$ και $B=[0,1)$. Πράγματι, $f(A)=[0,+\infty)$ και $f(B)=(-\infty,0]$ οπότε επειδή $\alpha<0$ έχουμε $x_2>0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha$ με $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις. Οπότε και η εξίσωση $x(x\alpha-1)=\alpha$ για $\alpha<0$ έχει ακριβώς δύο ετερόσημες λύσεις.

Δ) Στον παρακάτω πίνακα συγκεντρώνουμε τα συμπεράσματα από τα προηγούμενα ερωτήματα:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$		$-$	‖	$-$	
$f''(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
f		8	‖	7	Σ.Κ.	8	‖	7	

Έτσι έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση:



Ε) Η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(2,f(2))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y=-\frac{5}{9}x+\frac{16}{9}.$$

Επειδή η f είναι κυρτή στο $(1,+\infty)$, κοντά στο 2 θα ισχύει: $f(x)\geq-\dfrac{5}{9}x+\dfrac{16}{9}$. Άρα υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $x\in(2-\delta,2)\cup(2,2+\delta)$ να ισχύει: $9f(x)+5x-16>0$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 2}\left(9f(x)+5x-16\right)=0$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{9f(x)+5x-16}=+\infty .$$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to 2}\left(e^{x-2}+1924\right)=1925>0$

Άρα: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x-2}+1924}{9f(x)+5x-16}=$

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{1}{9f(x)+5x-16}\cdot\left(e^{x-2}+1924\right)\right]=+\infty$$

ΣΤ) Έστω $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα: $[0,x]$ και $[x,2x]$ αφού $[0,x]\subseteq(0,1)$ και $[x,2x]\subseteq(0,1)$

- Από το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0,x]$ στη συνάρτηση f προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(0,x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}$
- Από το Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[x,2x]$ στη συνάρτηση f προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(x,2x)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2x)-f(x)}{2x-x}=\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$

Όμως η f κοίλη στο $[0,1)$ οπότε η f' γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$. Άρα ισχύει:

$$0<\xi_1<x<\xi_2<1\Rightarrow f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Rightarrow$$

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{f(2x)-f(x)}{x}\Rightarrow f(x)>f(2x)-f(x)\Rightarrow$$

$$2f(x)>f(2x)\ .$$