

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 12

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στη Μονοτονία – Ακρότατα

1. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Η συνάρτηση $g(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

2. Να μελετήσετε τη μονοτονία των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = e^x + x - 1$

β. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

γ. $f(x) = \eta\mu x - 2x$

δ. $f(x) = (x-1)^3 - 2$

ε. $f(x) = x - \eta\mu x - 1$

στ. $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

ζ. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

η. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$

θ. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x - 1$

ι. $f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{7}{2}x^2 + 6x - 1$

ια. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 1$

ιβ. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 7$

ιγ. $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$

ιδ. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

ιε. $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{2x^2}$

ιστ. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

ιζ. $f(x) = x - 2\sqrt{x}$

ιη. $f(x) = x\sqrt{x+1}$

ιθ. $f(x) = 2e^x - x + 1$

κ. $f(x) = x^x, \quad x > 0$

κα. $f(x) = (x-2)e^x - \frac{x^2}{2} + x + 1$

κβ. $f(x) = x^2 - x\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x$

κγ. $f(x) = \frac{1}{1 + \eta\mu x}, \quad x \in [0, \pi]$

κδ. $f(x) = \varepsilon\phi x - x, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

κε. $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$

κστ. $f(x) = 2\eta\mu x - x, \quad x \in [-\pi, \pi]$

κζ. $f(x) = e^x - e \ln x$

κη. $f(x) = x^2(2\ln x - 5) - 4x(\ln x - 3)$

κθ. $f(x) = -2x^2 + 4x - (x-1)\ln x$

λ. $f(x) = 2e^x - x^2 - x$

λα. $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 7x$

λβ. $f(x) = \begin{cases} 1 - \ln(x^2 + 1), & x < 0 \\ e^x - x, & x \geq 0 \end{cases}$

λγ. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 0 \\ 2x^3 - 3x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

λδ. $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2, & x \leq 1 \\ -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4, & x > 1 \end{cases}$

3. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο των συναρτήσεων:

α. $f(x) = e^x + 2x - 1$

β. $f(x) = e^{-x} - x - 1$

γ. της f' όταν $f(x) = x \ln(1+x)$

δ. της f'' όταν $f(x) = e^x - ex \ln x + ex$

4. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία:

$$\alpha. f(x) = \frac{\ln x}{x-2} \quad \beta. f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \gamma. f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \in (0, \pi) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

5. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία:

$$\alpha. f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$$

$$\beta. f(x) = 2x \ln x - x^2$$

$$\gamma. f(x) = e^{-x} + \ln x$$

$$\delta. f(x) = -\sigma\varphi x + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \pi)$$

6. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \ln x - \frac{1}{x} - \sqrt{1-x}$$

$$\beta. f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$$

7. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία:

$$\alpha. f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x - x, \quad x \in [0, \pi]$$

$$\beta. f(x) = e^x \sigma\upsilon\nu x, \quad x \in [0, \pi)$$

$$\gamma. f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2})$$

$$\delta. f(x) = \frac{\sigma\varphi x}{x}, \quad x \in (0, \pi)$$

8. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = x\sqrt{4-x^2}$$

$$\beta. f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + 2x$$

9. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία:

$$\alpha. f(x) = e^x (x^2 - 4x + 5)$$

$$\beta. f(x) = 3x^5 - 15x^4 + 20x^3$$

$$\gamma. f(x) = x + \sigma\upsilon\nu x - 5$$

$$10. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x, & x < 1 \\ x^3, & x \geq 1 \end{cases}$$

α. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο 1.

β. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

$$11. \text{ Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x < 3 \\ e^x (x - 3) + 2, & x \geq 3 \end{cases} \text{ και στη}$$

συνέχεια να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

$$12. \text{ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x - x^4, & x > 1 \end{cases} \text{ είναι γνησίως φθίνουσα στο}$$

διάστημα $(0, +\infty)$.

$$13. \text{ Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση } f(x) = x^2 - 3x - 6 + |x + 6|.$$

14. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = f'(1) = 0$

και ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x-1}, & x > 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$

είναι γνησίως φθίνουσα.

15. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 0$ και

με γνησίως φθίνουσα πρώτη παράγωγο. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

είναι γνησίως φθίνουσα.

16. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$, για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + x^2 + x - 1$ είναι γνησίως αύξουσα.

17. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \sin x$ είναι γνησίως αύξουσα.

18. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x) = 8x^3 - 3(\lambda + 3)x^2 + 6\lambda x - 2$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

19. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = e^x - x + \ln(1 + x^2)$

β. $f(x) = \ln x + x + e^{-x}$

20. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες:

α. $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + \sin x$

β. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x(1 - \ln x) - \sqrt{x^2 + 1}$

21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2 + 6\ln x = 4x - 3$

β. $x^2 + 4x + 5 = 5e^x$

γ. $x \ln x = 2x - e$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1} = x^2 - 4$

23. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3e^x + x^3 = 3x^2 - 3x$ έχει μοναδική λύση, η οποία ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

24. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα.

25. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $2e \ln x + x^2 = 2(e + 1)x - 7$.

26. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x^2 - 9x - \lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

27. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3\lambda^2 x + 2\lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (0, +\infty)$.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \sin x$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία

β. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sin x < \pi - 2x$ ii) $\sin(|x| - 1) - \sin(3|x| - 7) < 4|x| - 12$

29. Να αποδείξετε ότι:

α. $e^x \geq 1 - \sqrt{x}$ για κάθε $x \geq 0$

β. $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. $\ln(x+1) < e^x - 1$ για κάθε $x > 0$.

30. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 0$ και $f'(x) < 3(x^2 - 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(-2, 1)$.

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 3$

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(e)$ και $f(2)$.

γ. i) Αν $x \in (0, 1)$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$.

ii) Αν $\alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^5 - \beta^5}{\alpha - \beta} > -2$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{f(x)}$.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$.

α. Να λύσετε: i) την εξίσωση $x^5 + x = 2$ ii) την ανίσωση $x > \frac{2}{x^4 + 1}$.

β. Να λύσετε: i) την εξίσωση $f(x^2 - 2) + 2 - x = x^5$ ii) την ανίσωση $f(x^5 + 2) + x^5 < -x - 2$
iii) την εξίσωση $f^5(x) + f(x) = x^5 + x$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε: i) την εξίσωση $x^2 + 1 = 2e^{x-1}$.

ii) την ανίσωση $f(x^2 + 1) < f(5e^{x-2})$

iii) την ανίσωση $\ln(1 + f^2(x)) < f(x) + \ln 2 - 1$

γ. Να δείξετε ότι $e^\pi f(e^\pi) < \pi^2 + 1$.

δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{f(2x) - f(x)}$.

34. α. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2+1} + \ln(1+x^2) = e$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $\ln \frac{2x-1}{x^2} < e^{x^2} - e^{2x-1}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} + \ln x = e^x$.

35. α. Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = 1 - x^2$

β. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2-1} \cdot x^x < 1$ στο $(0, +\infty)$.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = x^2$ έχει μοναδική ρίζα στο $(-1, 0)$.

36. Έστω $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ και $f(2) = 0$. Να λύσετε την εξίσωση $(x-1)f(x) + 2 = x$.

37. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(e) = e \ln 2$ και $f'(x) < 0$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι

$$f(1) > \ln \frac{2^{e+1}}{e+1}.$$

38. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$.

39. Να λύσετε την εξίσωση $(\pi - 2x)\sin x + 2\eta\mu x - \pi = 0$, στο διάστημα $[0, \pi]$.

40. Να λύσετε την εξίσωση $2^x = x^2$ στο $(0, +\infty)$.

41. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = f(1) = 0$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 5$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές: i) $f(\pi)$ και $f(e)$. ii) $f\left(\frac{1}{7}\right)$ και $f\left(\frac{1}{9}\right)$.

γ. Αν $x > 2$, να δείξετε ότι $f(x) > 13$.

δ. Αν $x \in [0, 1)$, να δείξετε ότι $2 < f(x) \leq 5$.

ε. Αν $x > 1$, να δείξετε ότι:

$$\text{i) } f(\sqrt{x}) > 2 \quad \text{ii) } f(x^2) > f(x) \quad \text{iii) } f(f(x)) > 13$$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - \ln x$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε: i) την εξίσωση $e^{x^2} - f(2x^2 + 1) = \ln(x^2 + 1)$

$$\text{ii) την ανίσωση } \ln \varepsilon \varphi x > e^{\eta \mu x - 1} - e^{\sigma \upsilon \nu x - 1}, \text{ στο } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$44. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 0 \\ x^2 - 2x, & x > 0 \end{cases}.$$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(-3x) < f(-x^2)$, στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{-x}) < f\left(\frac{1}{2}\right)$, στο διάστημα $(0, 1)$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) > f(x+1)$, για κάθε $x > 0$.

45. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν: $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f'(1) = 0$.

α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $f(3-x) = f(0)$, στο διάστημα $[2, +\infty)$.

ii) $f(e^{1-x}) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, στο διάστημα $(0, 1]$.

46. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $f(0) = g(0)$ για τις οποίες ισχύει

$f'(x) < g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

47. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 1$, για την οποία ισχύει $xf'(x) + 1 < xe^{x-1}$ για κάθε

$x > 0$. Να δείξετε ότι $f(x) < e^{x-1} - \ln x$, για κάθε $x > 1$.

48. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο και ισχύουν:

$f'(0) > 0$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(\varepsilon\varphi x) > f(x)$, στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x) + e^x = f(x) + 1$.

49. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(3) = f(2)$ και με γνησίως αύξουσα πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Να λύσετε:

α. την εξίσωση $f(x+1) - f(x) = 0$,

β. την ανίσωση $f(5x+1) > f(5x)$,

γ. την εξίσωση $f(x^2 + 2) = f(x^2 + 1)$.

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x(x^2 + 2)$.

α. Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f' είναι γνησίως αύξουσες.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^4 + 2) + f(x^2 + 3) > f(x^4 + 1) + f(x^2 + 4)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^4 + 2) - f(2x^2 + 2) = f(x^4 + 1) - f(x^2 + 1)$.

51. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1) + 3$ και $g(x) = e^x - x^2$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας ε στη γραφική παράσταση της f που διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$.

β. Να δείξετε ότι η παραπάνω ευθεία ε εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g σε ένα, ακριβώς σημείο, το οποίο να βρείτε.

52. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει τοπικό μέγιστο το 2. Να βρείτε την

εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x) = e^{2x}f(x)$ στο σημείο της

$M(0, g(0))$.

53. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:

α. $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 10x^3 + 1$ β. $f(x) = x^2 + 8\sqrt{25 - x^2}$ γ. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

δ. $f(x) = 1 + \frac{1}{2x^2}$ ε. $f(x) = \ln x - e^{x-1} + 2$ στ. $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$, $0 < x \leq e^2$

54. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 1, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 1 \end{cases}$

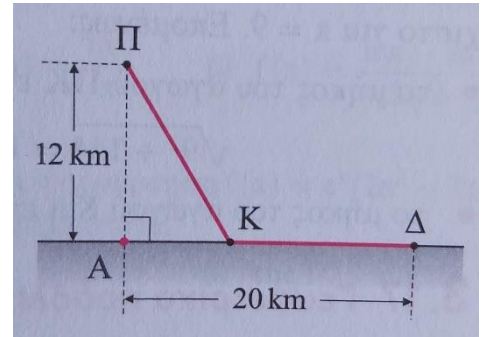
55. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8, & x \leq -1 \\ x^2 - 2x - 2, & -1 < x < 3 \\ x^2 - 8x + 14, & x \geq 3 \end{cases}$
56. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$
57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3(\alpha + 2)x^2 + 6\alpha^2x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές των α και β η f παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ τοπικό ακρότατο το 5.
58. Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha \ln x - \frac{\beta}{x} + 3\alpha$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 το 5, να βρείτε τα α, β .
59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \alpha x$ για την οποία ισχύει $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
60. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
61. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = x^3 + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
 - Αν ισχύει ότι $f(\alpha + \beta) = -f(3\alpha + 4\beta)$, να βρείτε τους αριθμούς α και β .
63. Να αποδείξετε ότι:
- $e^x - 1 \leq xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $e^{x-1} \geq 1 + \ln x$ για κάθε $x > 0$.
64. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = 2x \ln x - x^2$.
65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x - 2x + 1$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x \ln x - x^2 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.
66. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = e^{1-x} \cdot x$ και $g(x) = \eta\mu x + x^2 - x + 1$
- Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - Να αποδείξετε ότι $e^{1-x} \cdot x - \eta\mu x \leq x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
67. Δίνεται μια συνάρτηση $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1) < f(0) < f(3) < f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.
68. Για τον πραγματικό αριθμό $\alpha > 0$ ισχύει ότι $\alpha^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.
69. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 2$ και $f(x) \geq e^x + \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
70. Αν για κάθε $x > 0$, ισχύει $\alpha \ln x \leq x - 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του α .

71. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = 1$ και ισχύει $f(x) \geq 2e^x - x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

72. Μια πλατφόρμα (Π) άντλησης πετρελαίου βρίσκεται στη θάλασσα και απέχει από το σημείο Α της ακτής απόσταση $PA = 12$ km. Η πλατφόρμα πρόκειται να συνδεθεί με ένα διωλιστήριο (Δ) που βρίσκεται στην ακτή και απέχει 20 km από το σημείο Α. Η σύνδεση θα γίνει με ένα υποθαλάσσιο αγωγό (ΠΚ) και έναν επίγειο αγωγό (ΚΔ). Το κόστος του υποθαλάσσιου αγωγού είναι 25.000 €/km και του επίγειου αγωγού είναι 15.000 €/km. Να βρείτε πόσο πρέπει να είναι το μήκος κάθε τύπου αγωγού, ώστε το κόστος της σύνδεσης να είναι ελάχιστο.



73. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 4 cm. Θεωρούμε τα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν πάνω στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα έτσι, ώστε $AK = BL = GM = DN = x$ cm. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΚΛΜΝ γίνεται ελάχιστο.

B. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στη Μονοτονία – Ακρότατα

74. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2, & 1 \leq x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$. Να βρείτε:

- Τα κρίσιμα σημεία της f .
- Τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f .
- Το σύνολο τιμών της f .

76. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 1$ και ισχύει

$$f^3(x) + e^x = f(f(x)) + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι η } f \text{ δεν έχει ακρότατα.}$$

77. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 1$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύουν

- $f(x) \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $(f^2(x))' \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

β. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα και είναι γνησίως αύξουσα.

γ. να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right)$

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |e^x + ax - 1|$, $x \in \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη.

α. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο και στη συνέχεια, ότι $f'(0) = 0$.

β. Να βρείτε την τιμή του a και να δείξετε ότι $f(x) = e^x - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

γ. Αν η f είναι ορισμένη στο $B = [-1, 1]$, να βρείτε το $f(B)$.

79. Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(2) = 3$ η οποία είναι παραγωγίσιμη. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

80. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες που έχουν κοινά σημεία τα $(\alpha, f(\alpha))$ και $(\beta, f(\beta))$ και η C_f είναι πάνω από τη C_g στο διάστημα (α, β) . Να δείξετε ότι:

α. Υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε η κατακόρυφη απόσταση των σημείων με τετμημένη των C_f και C_g , να γίνει μέγιστη.

β. Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $(\xi, f(\xi))$ και $(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλες.

81. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα:

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2, & -1 \leq x \leq 1 \\ e^{x-1}, & x > 1 \end{cases} \quad \beta. f(x) = \begin{cases} xe^x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

82. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha \ln(x-1) - \beta x^2 - 4x + 1$, να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$. Στη συνέχεια να βρείτε τις τιμές και το είδος των ακροτάτων αυτών.

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 1$.

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης f .

β. Να λύσετε την εξίσωση $x^{x-2}e^{x-1} = 1$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

84. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha. f(x) = x^2 - e^x \quad \beta. f(x) = e^x \ln x$$

85. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$.

α. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f .

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$, για την οποία ισχύει $e^x \geq \lambda x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (β), να αποδείξετε ότι η ευθεία $\epsilon: y = \lambda x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $g(x) = e^x$.

86. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^6 - 6x + 7$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει το ίσον;

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 2}$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + |x-1| = 2$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 59$.

87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in (-\infty, 3]$, για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = -6$.

γ. Να λύσετε στο διάστημα $(1, +\infty)$ τις εξισώσεις: i) $f\left(\frac{3}{x}\right) = -3$ ii) $3 + f(4 - x^2) = 0$

88. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(0) = 0$ και η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $f(2x^2) + f(x) = f(x^2) + 1$ ii) $f(2x) = f(x)$

89. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^x - x)$ και $g(x) = \eta\mu x - x^2 - x$

α. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να λύσετε την εξίσωση $\ln(e^x - x) + x^2 = \eta\mu x - x$.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\ln x - 2)^2 (x - 1)^2$. Να δείξετε ότι η f έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μέγιστου.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 + \ln x$.

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται, να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} .

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xe^{x^2-2021} = 1$ έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x) - e^2) < 1$.

ε. Αν η f είναι ορισμένη στο $B = (0, 1]$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x}$.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 1, & x > 0 \end{cases}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

93. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^7 + x - 1$. Να δείξετε ότι:

α. Η f έχει ακριβώς μία ρίζα θετική.

β. Η εξίσωση $f(x) = f(9)$ είναι αδύνατη στο $(-\infty, 3)$.

94. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^3 - 6x + 1 = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες θετικές και μία αρνητική.

95. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 3$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(3)$ έχει μοναδική λύση.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > f(3)$.

γ. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει $x_0 > 0$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 1 + e^{-x_0}$.

96. Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 e^x - a = 0$.

97. Αν $|\alpha| < 2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + a = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \lambda x$, $\lambda > 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η f έχει ακριβώς δύο ρίζες.
99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + x^2$. Να δείξετε ότι:
- α. Υπάρχει μοναδικό $x_0 > 0$, στο οποίο η f παρουσιάζει ελάχιστο.
- β. Το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ ανήκει στην παραβολή $y = -x^2 - x$.
100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 2x - 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν μοναδικά $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, τέτοια, ώστε η συνάρτηση f , να παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2 .
101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$. Να δείξετε ότι από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ διέρχονται, ακριβώς, δύο εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f .
102. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2$. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν, ακριβώς, δύο κοινές εφαπτομένες.
103. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + x^2$. Να δείξετε ότι:
- α. Η f παρουσιάζει μοναδικό ακρότατο στο x_0 και επιπλέον ότι:
- i) $x_0 < -\frac{1}{2}$
- ii) το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ ανήκει στην παραβολή $y = x^2 - 2x$.
- β. $f(x) > \frac{5}{4}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
104. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(1 + e^x)$.
- α. Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω , που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x, f(x))$ με τον άξονα $x'x$.
- β. Να βρείτε το πλήθος των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = x^2 + x - f(x)$, στα οποία οι εφαπτομένες της C_g είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
105. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - e \ln x$.
- α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(f(x) - 2) = e$ έχει, ακριβώς, δύο ρίζες.
- γ. Αν x_1, x_2 , (με $x_1 < x_2$) οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι:
- i) υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, x_2)$, τέτοιο, ώστε $f'(x_0) + f(x_0) = 3$.
- ii) υπάρχει μοναδικό $\xi \in (x_1, 1)$, τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$.
106. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει:
- α. $f^3(x) + f(x) + 1 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- i) να βρείτε το σύνολο τιμών της f ,

ii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β. $f^3(x) + f(x) + 1 = x + e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

107. Σε ποιο σημείο της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x \ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

α. Να βρείτε το πλησιέστερο σημείο M της C_f προς το A .

β. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία ε στη C_f στο σημείο M , είναι κάθετη στην ευθεία AM .

109. Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $x = x(t) = t^4 - 12t^3 + 48t^2 - 80t + 1$, $0 \leq t \leq 6$. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια, να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

α. Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;

β. Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;

γ. Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$, $x > 0$. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f , από το οποίο, αν φέρουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες, το σχηματιζόμενο ορθογώνιο έχει ελάχιστο εμβαδόν.

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 6 - x^2$, ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με $A, B \in C_f$, $\Gamma, \Delta \in x'x$ και $\Gamma(x, 0)$ με $x \in (0, \sqrt{6})$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ορθογωνίου, ώστε το ορθογώνιο να έχει το μέγιστο εμβαδόν.

112. Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 16, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

113. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 900 m^2 , να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου με τη μικρότερη περίμετρο.

114. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με υποτεινούσα $B\Gamma = 2\sqrt{2}$. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Δ και E στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα έτσι, ώστε $AD = \Gamma E = x$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $B\Delta E\Gamma$ ως συνάρτηση του x είναι $E = E(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$, $x \in (0, 2)$.

β. Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

115. Δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $A = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $B\Gamma = \sqrt{6}$, $AB = x$, $x \in (0, \sqrt{6})$, $BE = u$ και $\Gamma\Delta = 2AB$.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ ως συνάρτηση του x είναι $E = E(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{6-x^2}$, $x \in (0, \sqrt{6})$.

β. Να βρείτε την τιμή του x , για την οποία το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

116. Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω. Το ύψος του κουτιού είναι 4 dm. Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και η μία πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$.
- α. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $E = E(x) = -x^2 + 10x + 80, x \in (0,10)$.
- β. Να βρείτε, για ποια τιμή του x , το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.
117. Από όλους τους κυλίνδρους που έχουν σταθερό όγκο V , να δείξετε ό τι εκείνος που έχει τη μικρότερη επιφάνεια, είναι αυτός που το ύψος του u είναι ίσο με τη διάμετρο της βάσης του.
118. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$. Να δείξετε ότι:
- α. Υπάρχουν μοναδικά σημεία A, B των C_f, C_g αντίστοιχα με κοινή τετμημένη $\alpha \in (0,1)$, ώστε η κατακόρυφη απόσταση d μεταξύ των C_f και C_g να παίρνει τη μικρότερη τιμή.
- β. Οι εφαπτομένες των C_f και C_g στα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\alpha, g(\alpha))$ είναι παράλληλες.
119. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(x^2 + 1)$
- α. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(f(x) - 2019) = 0$ έχει μοναδική λύση.
- δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(2e^{x-1} - x^2 - 1) > 0$.
120. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1) = 0$, για την οποία ισχύει $xf'(x)e^{f(x)} + 1 = x$, για κάθε $x > 0$.
- α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f .
- β. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln(x - \ln x), x > 0$.
- γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \eta\mu x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- δ. Αν $g(x) = \sqrt{e^x + \ln(x+1)} - 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h = g \circ f$.
121. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο και ισχύουν:
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[xf\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 1$
 - $f''(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) > 1$.
- α. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$.
- β. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.
- γ. να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln(x+1) = 0$.
- δ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \ln x)$.