

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 14

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΓΡΑΦ. ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στις Ασύμπτωτες Γραφικής Παράστασης

1. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

β. $f(x) = \frac{x}{x-2}$

γ. $f(x) = \varepsilon\varphi x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

2. Να βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$

β. $f(x) = \frac{\ln(9 - x^2)}{x^2}$

γ. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x-1}, & x \leq 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \end{cases}$

3. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

β. $f(x) = \sigma\varphi x, x \in (0, \pi)$

γ. $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$

δ. $f(x) = \varepsilon\varphi x - x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ε. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$

στ. $f(x) = \ln(e^x - 1)$

ζ. $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$

4. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{x - 1}$

5. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

β. $f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$

γ. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$

δ. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

α. Να βρείτε στο $+\infty$ και στο $-\infty$ τις ασύμπτωτες ε_1 και ε_2 αντίστοιχα της C_f .

β. Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ε_1 κοντά στο $+\infty$ και πάνω από την ε_2 κοντά στο $-\infty$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1}$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 4$ είναι πλάγια

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

8. Να βρείτε τις οριζόντιες ή τις πλάγιες ασύμπτωτες των συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 6}{x^2 - 4x + 3}$

β. $f(x) = 3x^2 - 7x + 13$

$$\gamma. f(x) = \frac{3x^5 - 7x^4 + x^2 - 11}{5x^2 - x + 2}$$

$$\delta. f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x - 1 + \eta\mu x}{x + 1}$. Να βρείτε:

α. την ασύμπτωτη ε της C_f στο $+\infty$.

β. τα σημεία τομής της ε και της C_f .

10. Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$\beta. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\gamma. f(x) = e^{-x^2}$$

$$\delta. f(x) = \frac{x}{e^x - x}$$

$$\varepsilon. f(x) = x\eta\mu \frac{1}{x}$$

$$\sigma\tau. f(x) = \frac{1 + \ln x}{e^x}$$

11. Να βρείτε τις οριζόντιες και τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = \frac{e^x}{x}$$

$$\beta. f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\gamma. f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

$$\delta. f(x) = \ln(x+1) - \ln x$$

12. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $g(x) = f(x) - 2x + \frac{x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$ και η

ευθεία $\gamma = 3x - 2$ η οποία είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α. Να βρείτε την ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

β. Να βρείτε τις τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2 + \lambda x - 1}{\lambda f(x) - 4x + 5} = 1$

13. Να δείξετε ότι η ευθεία $\gamma = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \text{ στο } +\infty.$$

14. Να βρείτε τις πλάγιες ή οριζόντιες ασύμπτωτες στο $+\infty$ των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\alpha. f(x) = x - 1 + \frac{1}{x}$$

$$\beta. f(x) = 2 + \frac{1}{x + 1}$$

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 2\alpha}{x - \alpha^2}$. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθεία

$x = 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f .

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha^2 x^\nu + 5x + 1}{x^2 + 1}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, για

τις οποίες η ευθεία $\gamma = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

17. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + \beta x + 3}{x - 1} - x \right) = 2$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 7}{x + \gamma}$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β και γ , ώστε

η C_f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 1$ και πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 2x + 3$.

19. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 2x - 3$.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 4x^2 + \sqrt{x^4 + 1}}{x^2 f(x) - 2x^3 + x^3 \eta \mu \frac{1}{x}}$.

β. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 2x^2 + \lambda x + 13}{\lambda f(x) - 4x + 21} = \frac{4}{7}$.

20. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι:

$2f'(x) + xf''(x) = -\eta \mu x$ για κάθε $x > 0$. Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο $M(\pi, f(\pi))$ έχει εξίσωση $x + \pi y - \pi = 0$.

α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f'(\pi)$ και $f(\pi)$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + xf'(x) - \sigma \nu x$ είναι σταθερή.

γ. Να βρείτε τον τύπο της f .

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

21. Έστω $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f καθώς $x \rightarrow +\infty$.

α. Να υπολογίσετε τα όρια: i). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ ii). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta \mu(2x)}{xf(x) - 3x^2 + 1}$

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g καθώς $x \rightarrow +\infty$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

γ. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

δ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $C_{f^{-1}}$.

ε. Να βρείτε τα σημεία καμπής της $C_{f^{-1}}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

δ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος (γ), με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

24. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$ και $g(x) = x \ln x$

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_g .

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση
$$h(x) = \begin{cases} (1-e^{-x}) \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

i) Να εξετάσετε αν η h είναι συνεχής στο 0.

ii) Να εξετάσετε αν η h είναι παραγωγίσιμη στο 0.

iii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση.

iv) Να αποδείξετε ότι η h έχει ακριβώς 2 ακρότατα.

konkris