

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 18

ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ2, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Β' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στις Μεθόδους Ολοκλήρωσης - Ανισότητες

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^1 x e^x dx$$

$$\beta. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta \mu x dx$$

$$\gamma. \int_0^{\pi} x^2 \sigma \upsilon \nu x dx$$

2. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$\beta. \int_{-1}^0 \frac{2x+3}{e^x} dx$$

$$\gamma. \int_0^1 (3x^2 - 5x) e^x dx$$

$$\delta. \int_0^1 x \cdot 2^x dx$$

3. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_1^2 2x \ln x dx$$

$$\beta. \int_1^2 \ln x dx$$

$$\gamma. \int_0^1 \ln(x+1) dx$$

$$\delta. \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$\epsilon. \int_1^9 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

4. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^{\pi} e^x \sigma \upsilon \nu x dx$$

$$\beta. \int_0^{\pi} \frac{\eta \mu 2x}{e^x} dx$$

$$\gamma. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx$$

5. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sigma \upsilon \nu x dx$$

$$\beta. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x) \eta \mu 2x dx$$

$$\gamma. \int_0^{\pi} x \eta \mu^2 x dx$$

$$\delta. \int_1^2 (x^3 - 2x) \ln x dx$$

$$\epsilon. \int_1^e \ln x dx$$

$$\sigma\tau. \int_2^4 x \ln^2 x dx$$

6. Έστω F μία παράγουσα στο $\mathbb{R}$ της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2}$, με $F(1) = 0$. Να υπολογίσετε το

$$\text{ολοκλήρωμα } \int_0^1 F(x) dx.$$

7. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\eta \mu^2 x} dx$$

$$\beta. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x - \eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu^2 x} dx$$

$$\gamma. \int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\delta. \int_{\frac{1}{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$$

8. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$ και συνεχής δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = \pi. \text{ Να δείξετε ότι } f(\pi) = \pi.$$

9. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 2$, έχει συνεχή

$$\text{δεύτερη παράγωγο και ισχύει } \int_0^2 [x f''(x) + 2 f'(x)] dx = 0$$

α. Να δείξετε ότι $f(0) = f(2)$.

β. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$, τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

10. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει

$$\int_0^{\pi} (f(x) + f''(x)) \eta \mu x dx = 2. \text{ Επίσης η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο σημείο της } M(\pi, f(\pi)) \text{ έχει εξίσωση}$$

$$2x - \pi y - \pi = 0. \text{ Να υπολογίσετε:}$$

α. τις τιμές $f(\pi)$ και $f'(\pi)$,

β. την τιμή $f(0)$,

$$\gamma. \text{ το ολοκλήρωμα } \int_0^{\pi} x f''(x) dx$$

11. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $I_v = \int_0^1 x^v e^x dx, \quad v \in \mathbb{N}^*.$

α. Να αποδείξετε ότι $I_v = e - v \cdot I_{v-1}$ για κάθε $v \geq 2$

β. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: i) $\int_0^1 x e^x dx$ και ii) $\int_0^1 x^4 e^x dx$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 2x + 1$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_{-1}^0 f(x+1) dx$$

$$\beta. \int_1^e \frac{f(\ln x)}{x} dx$$

13. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Να δείξετε ότι $\int_2^4 f\left(\frac{2}{x}\right) dx = 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x^2} dx.$

14. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu \left(x - \frac{\pi}{3} \right) dx$$

$$\beta. \int_0^1 \frac{1}{2x+1} dx$$

$$\gamma. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\delta. \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

15. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_{-\frac{3}{2}}^2 x(2x-3)^5 dx$$

$$\beta. \int_{-\frac{1}{2}}^0 (4x-3)^2(2x+1)^{11} dx$$

16. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^1 (x-1)^3(2x-1) dx$$

$$\beta. \int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$$

17. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_3^{10} x \cdot \sqrt[3]{x-2} dx$$

$$\beta. \int_0^{\sqrt[4]{3}} x^7 \cdot \sqrt{x^4+1} dx$$

$$\gamma. \int_2^{65} \frac{\sqrt{x-1}+1}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{x-1}} dx$$

18. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx$$

$$\beta. \int_2^3 \frac{x+3}{x^2-1} dx$$

$$\gamma. \int_2^3 \frac{x^3+3}{x^2-1} dx$$

$$\delta. \int_0^1 \frac{2x-3}{x+1} dx$$

$$\epsilon. \int_2^3 \frac{x}{x-1} dx$$

19. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$\beta. \int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x - 3\ln x + 2}{x \ln x} dx$$

$$\gamma. \int_0^{\ln \sqrt{3}} \frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)\ln(e^{2x}+1)} dx$$

$$\delta. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\varepsilon\varphi^2 x - 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \sqrt{\varepsilon\varphi x}} dx$$

$$\epsilon. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\eta\mu x} \cdot \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$$

$$\sigma\tau. \int_{\frac{\pi^2+4}{4}}^{\pi^2+1} \sigma\upsilon\nu \sqrt{x-1} dx$$

$$\zeta. \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^3 x dx$$

$$\eta. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^3 x dx$$

$$\theta. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^4 x dx$$

20. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu x dx$$

$$\beta. \int_0^{\pi} \eta\mu^3 x dx$$

$$\gamma. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx$$

21. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\beta. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

$$\gamma. \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+1} dx$$

22. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-\alpha, \alpha]$.

$$\alpha. \text{ Αν η f είναι περιττή, τότε ισχύει } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0.$$

$$\beta. \text{ Αν η f είναι άρτια, τότε ισχύει } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$$

23. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής και περιοδική με περίοδο T . Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha. \int_T^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^{\alpha} f(x)dx \quad \beta. \int_T^{\alpha+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

β. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β. Να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x)dx$.

26. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x) + f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

β. Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)dx$.

27. Έστω $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι:

α. (i). Αν η f είναι περιττή, τότε ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$.

(ii). Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{2 + \sin x} dx$.

β. Αν η f είναι άρτια, τότε ισχύει $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x)dx$

28. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx \quad \beta. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^6 x}{\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x} dx$$

29. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1-x) + f(1+x) = 2$ για κάθε

$x \in [-1, 1]$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 f(x)dx$.

30. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha. I = \int_1^{e^2} |\ln x - 1| dx \quad \beta. I = \int_1^e \eta\mu(\ln x) dx$$

31. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) = e^x + \int_0^1 xf(x)dx$, $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f .

32. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, να

δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx = \frac{\alpha + \beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \frac{e^x}{1 + e^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h .

γ. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h .

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^1 e^x h(x)dx$.

34. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \ln x + e^x$, $x \in (1, +\infty)$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$.

β. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2005$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα $(1, +\infty)$.

δ. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \int_2^e f(x)dx + \int_{f(2)}^{f(e)} f^{-1}(x)dx.$$

35. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την εξίσωση $2(x^2 - 3x + 2) = \ln\left(\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1}\right)$

γ. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$.

δ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-1}^1 xf(x)dx$

36. Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\eta\mu x - x$

α. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in [0, \pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_0, f(x_0))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) \sin x dx$

δ. i) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) - f(2x)] \ln x$

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$ και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right)$.

γ. Ένα σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$, $x \geq 0$ με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του M είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $x(t)$, αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$.

δ. Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

38. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 1$. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \int_1^3 (f^2(x) - 6f(x) + 9)dx > 0 \quad \beta. \int_1^3 f^2(x)dx > 4 \int_1^3 f(x)dx - 8$$

39. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \sqrt{x+1} \leq \frac{x+2}{2} \text{ για κάθε } x \geq -1$$

$$\beta. \int_0^1 \sqrt{x^3+1}dx \leq \frac{9}{8}$$

40. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x^2 + 3}$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να αποδείξετε ότι $5 \leq \int_{-4}^2 f(x)dx \leq 9$.

41. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\int_1^3 f^2(x)dx = 6 \int_1^3 xf(x)dx - 78$. Να

βρείτε τον τύπο της f .

42. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\alpha+1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1+e^x}$. Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

β. $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{1+e}$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

γ. $\sqrt{2} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq \sqrt{1+e}$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $x > 0$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

β. Να δείξετε ότι $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x)dx > \frac{3e}{2}$.

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x + 1)$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 0$.

γ. Να δείξετε ότι: i) $\int_0^1 f(x)dx > \frac{1}{4} + \ln 2$ ii) $\int_1^2 xf(x)dx > \frac{7 + 9\ln 2}{6}$

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$. Να δείξετε ότι:

α. Η ευθεία $y = x + 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και είναι κάτω από την C_f στο $[0, +\infty)$.

β. $\int_0^1 f(x)dx > \frac{3}{2}$.

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Να δείξετε ότι

α. $f(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ β. $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{3}$

48. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι:

α. $0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot f(\eta \mu x)dx < 1$, όταν $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$.

β. $\int_0^1 f(e^x)dx < 2$, όταν $f(e) = 2$.

γ. i) $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}dx > 2 \ln 2$, όταν $f(1) = 2$ ii) $\int_1^2 f^2(x)dx > 4$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x - x^2 - x - 1$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

γ. Να δείξετε ότι:

i) $\int_1^e \frac{f(x)}{x}dx > e$ ii) $\int_1^2 xf(x)dx > \frac{23}{6}$ iii) $\int_0^1 xf(e^x)dx > \frac{3}{2}$

50. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) \geq 0$, για κάθε

$x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, $x \in [\alpha, \beta]$.

51. Έστω $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν: $f(x) \geq \frac{1}{x} + 1$, για κάθε

$x \in [1, e]$ και $\int_1^e f(x) dx = e$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

52. Να αποδείξετε ότι $\frac{4}{3} < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$.

53. Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής με ελάχιστη τιμή 1 και μέγιστη τιμή 3.

Να δείξετε ότι $\frac{4}{3} < \left(\int_1^2 f(x) dx \right) \left(\int_0^2 \frac{1}{f(x)} dx \right) < 12$.

54. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι θετική και συνεχής. Να δείξετε ότι:

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx > \int_1^2 xf(x) dx.$$

55. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Αν $\int_0^1 f^2(x) dx = 1$, να δείξετε ότι

$$2 + 3 \int_0^1 xf(x) dx \geq 0.$$

56. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και κυρτή. Να δείξετε ότι:

α. $f(2x) - f(x) \geq xf'(x)$, για κάθε $x \geq 0$.

β. $\int_0^1 f(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 f(x) dx$

γ. $\int_0^2 f(x) dx > 2f(1)$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1}, & 0 < x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β. Έστω a ένας σταθερός αριθμός με $a \in (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι $\int_1^a f(ax) dx < \frac{1}{a^2} \int_a^{a^2} xf(x) dx$.

58. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(1) = 0$ και $xf'(x) > 1$, $x > 1$.

α. Να δείξετε ότι $f(x) \geq \ln x$, για κάθε $x \geq 1$.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1) \int_1^e \frac{f(x)}{e-1} dx = 2 - x + \ln x$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1, e)$.

59. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει

$$f'(x) > 2\left(xf(x) + e^{x^2}\right), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

α. $f(x) \geq 2xe^{x^2}$, για κάθε $x \in [0,1]$

β. $\int_0^1 f(x)dx > e - 1$

γ. Η εξίσωση $x \int_0^1 f(x)dx = e - x$ έχει ακριβώς μία, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

60. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 0$, η οποία είναι κυρτή με $f'(1) = 3$. Να δείξετε ότι:

α. $f(x) \leq 3x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

β. Υπάρχει μοναδικό $\alpha \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε $a \int_0^1 f(x^2)dx = 2a - 1$.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 + e^x)$. Να δείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και κυρτή.

β. $\frac{1}{4} + \ln 2 < \int_0^1 f(x)dx < \ln(1 + e)$

γ. Υπάρχει μοναδικό $\theta \in (0,1)$, ώστε $4 \int_0^1 f(x)dx = 4f(\theta) - \theta + 1$.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x}$ και F μια παράγουσα της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(1) = 0$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και να λύσετε την ανίσωση $F(x^2 + 1) > 0$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση F ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_F .

γ. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F , τον άξονα x' και την ευθεία $x = 2$, να δείξετε ότι $2E > e$.

63. Έστω $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ (Δ διάστημα) μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f(x) > 0$, για κάθε

$x \in \Delta$. Αν $\alpha, \beta \in \Delta$ και $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$.

64. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι θετική και παραγωγίσιμη. Αν $\int_{f(1)}^{f(2)-1} f(x)dx = 0$, να

δείξετε ότι:

α. $f(2) - f(1) = 1$

β. υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 1$

65. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη, κυρτή και ισχύει $\int_0^1 f(x)dx = f(1)$.

Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς μία, οριζόντια εφαπτομένη.

66. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι

$\int_0^1 f(x)dx < \int_1^2 f(x)dx$.

67. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μία παράγουσα της f στο διάστημα $(0, +\infty)$ με $F(1) = 1$. Αν ισχύει $F(x) \leq x^2 + \ln x$, για κάθε $x > 0$, να δείξετε ότι $f(1) = 3$.
68. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα, ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ και F μία παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x+1) - F(x)) = 0$.
69. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$, που ικανοποιεί τη σχέση $2f(x) - e^{x-F(x)} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .
70. Έστω $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν $f'(x) = \frac{x+1}{x} f(x)$, για κάθε $x > 0$ και $f(1) = e$. Να βρείτε την f .
71. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις σχέσεις:
- $f(0) = 1, \quad f'(0) = 0, \quad f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
 - $f(x)(f''(x) + 2f(x)) = (f'(x))^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τη συνάρτηση f .
72. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και F μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ με $F(0) = 0$. Αν ισχύει ότι $(F(x) - e^x) \cdot (f(x) - e^x) = 2x^3 + 2x$, $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον τύπο της f .
73. Να βρείτε τη συνάρτηση f , με $f(0) = 2$, όταν ισχύει:
- α. $f'(x) + f(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$ β. $f'(x) - 2xf(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}$
74. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει
- $$f'(x) = \int_0^1 f(x) dx - f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$
- Να βρείτε την f .
75. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x) \cdot f'(-x) = -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$.
- α. Να δείξετε ότι $f(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}$
- β. Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}$
- γ. Να βρείτε την f .
76. Έστω $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύει
- $$f(x) \eta \mu x < \sigma \upsilon \nu x (e^x \sigma \upsilon \nu x - f'(x)), \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
- Αν $f(0) = 1$, να δείξετε ότι
- $$f(x) < e^x \sigma \upsilon \nu x, \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$
77. Αν η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ και η C_f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, \pi)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) \sigma \upsilon \nu \xi = f'(\xi) \eta \mu \xi$.
78. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και έχει ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 2\xi f(\xi)$.

79. Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και x_1, x_2 ρίζες της $f(x) = 0$ (με $x_1 < x_2$). Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

80. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{x}$ και F μία παράγουσα της f στο διάστημα $\Delta = (0, +\infty)$ με $F(1) = 0$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να δείξετε ότι η F είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση $F(e^x) - F(x^2 + 1) > 0$.

γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση F ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$1 + \frac{F(x)}{\ln(e-1)} = x.$$

81. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

β. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x^2) dx < \frac{1}{3}$.

Έστω F μια παράγουσα της f στο $(-\infty, 0]$ με $F(0) = 0$.

γ. Να μελετήσετε την F ως προς την κυρτότητα και στη συνέχεια, να δείξετε ότι $F(x) \leq xf(x)$, για κάθε $x \in [-1, 0]$.

δ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $G(x) = \begin{cases} \frac{F(x)}{x}, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$[-1, 0]$.

82. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, $f(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει

$$f'(x) + 2xf^2(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } F \text{ μία παράγουσα της } f \text{ στο } \mathbb{R} \text{ με } F(1) = 0.$$

α. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-2022}^{2022} f(x) \eta \mu x dx$.

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_F , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

δ. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x+1) - F(x) \eta \mu x] = 0$.