

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων από τρία εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας
3. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τόμος, Γ. Μιχαηλίδης, έκδοση 10^{ος} 2023, Ελληνοεκδοτική

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

A. Έννοια Συνάρτησης – Πεδίο Ορισμού - Τιμές

Κάθε συνάρτηση έχει τη μορφή $f : A \rightarrow B = f(A)$

Δηλαδή τα x «ξεκινάνε» από ένα σύνολο A που ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης και μέσω του τύπου της συνάρτησης καταλήγουν στο «ταίρι» τους y που βρίσκεται στο σύνολο τιμών της συνάρτησης που το συμβολίζουμε με B ή με $f(A)$.

Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης είναι πολύ σημαντικό. Αυτό μαζί με τον τύπο της συνάρτησης καθορίζουν πλήρως μια συνάρτηση.

Τι εννοούμε λοιπόν όταν λέμε: «Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \dots$. Βρείτε το πεδίο ορισμού της»; Σημαίνει ότι ψάχνουμε να βρούμε ποια x επιτρέπεται να βάλω στον τύπο της συνάρτησης. Στην πραγματικότητα στις ασκήσεις εμείς ψάχνουμε να βρούμε ποια x απαγορεύεται να βάλουμε στον τύπο της συνάρτησης και αυτά τα αποκλείουμε.

Άρα, πώς λύνουμε μια άσκηση που μου ζητούν να βρω το πεδίο ορισμού;

- + Ψάχνουμε πού μπορεί η συνάρτηση **να μην ορίζεται**.
- + Μήπως υπάρχει παρονομαστής; Τότε κάθε παρονομαστής πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν
- + Μήπως υπάρχει ρίζα; Τότε κάθε υπόριζο (δηλαδή η ποσότητα που είναι μέσα στη ρίζα) πρέπει να είναι μη αρνητική.
- + Μήπως έχω λογαριθμική συνάρτηση; Τότε η ποσότητα που είναι μέσα στον λογάριθμο πρέπει να είναι θετική.
- + Μήπως υπάρχει κάποιος συνδυασμός των παραπάνω; Τότε πρέπει να πάρω δύο ή και περισσότερους περιορισμούς και μετά να κάνω συναλήθευση.
- + Αφού λοιπόν αποκλείσουμε όλους τους απαγορευμένους αριθμούς, στο τέλος απαντάμε $A = \dots$ γράφοντας ποιο είναι το σύνολο των αριθμών που επιτρέπεται να πάρω για πεδίο ορισμού, δηλαδή ποιοι είναι οι αριθμοί που επιτρέπεται να βάλω στη θέση του x .

Παραδείγματα

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = 5x - 3$

Λύση

Υπάρχει κάποιος αριθμός που να απαγορεύεται να βάλω στη θέση του x ; Όχι! Μπορώ να βάλω οτιδήποτε θέλω! Άρα, πεδίο ορισμού είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Άρα γράφουμε ως απάντηση:

$$A = \mathbb{R}$$

2. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = 4x^5 - 3x^3 - 4x + 7$

Λύση

Υπάρχει εδώ κάποιος αριθμός που να απαγορεύεται να βάλω στη θέση του x ; Όχι! Και εδώ μπορώ να βάλω οτιδήποτε θέλω! Άρα, πεδίο ορισμού είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Άρα γράφουμε ως απάντηση:

$$A = \mathbb{R}$$

3. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{5x-2}{x-3}$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι κλάσμα. Και θυμάμαι ότι στα μαθηματικά, **οποτεδήποτε έχω κλάσμα ο παρονομαστής πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.**

Άρα, πρέπει $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 3$

Οπότε, από όλους τους πραγματικούς αριθμούς πρέπει να εξαιρέσω τον αριθμό 3.

Άρα απαντάω: $A = \mathbb{R} - \{3\}$ (που σημαίνει ότι δέχομαι όλους τους πραγματικούς αριθμούς εκτός από το 3)

Αυτό μπορεί να γραφτεί και ως εξής: $A = \mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

4. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+1}$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε πάλι ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι κλάσμα. Άρα πρέπει πάλι να απαιτήσω ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν.

Πρέπει $x^2 + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$. Ναι αλλά κάτι στο τετράγωνο είναι πάντα θετική ποσότητα. Άρα το x^2 δεν μπορεί ποτέ να γίνει ίσο με το -1. Άρα ο παρονομαστής μου ποτέ δεν θα γίνει ίσος με το μηδέν.

Άρα γράφουμε ως απάντηση: $A = \mathbb{R}$

5. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = \frac{3x^4-2x+1}{x^2-1}$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε πάλι ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι κλάσμα. Άρα πρέπει πάλι να απαιτήσω ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν.

Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{1} \Leftrightarrow x \neq \pm 1$

Άρα από όλους τους αριθμούς πρέπει να εξαιρέσω το 1 και το -1. Άρα απαντάω:

$A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ ή μπορώ να γράψω: $A = \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

6. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = 3x^2 - \sqrt{6-2x}$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε ότι ο τύπος της συνάρτησης έχει μια ρίζα. Γνωρίζω ότι για να έχει νόημα μια ρίζα θα πρέπει το υπόριζο (δηλαδή η ποσότητα μέσα στη ρίζα) να μην είναι αρνητικό.

Άρα πρέπει: $6 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq 2x \Leftrightarrow 2x \leq 6 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{6}{2} \Leftrightarrow \boxed{x \leq 3}$

Άρα η απάντηση είναι: $A = (-\infty, 3]$

7. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $f(x) = 3x - 4 - \sqrt{x^2 - 9}$

Λύση

Εδώ παρατηρούμε πάλι ότι ο τύπος της συνάρτησης έχει μια ρίζα. Άρα θα πρέπει:

$x^2 - 9 \geq 0$ Πώς λύνουμε αυτή την δευτεροβάθμια ανίσωση; Μπορούμε να το κάνουμε με 3 τρόπους:

α' τρόπος (ο καλύτερος και ο πιο γρήγορος αλλά δεν λειτουργεί πάντα)

$$x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| \geq 3 \Leftrightarrow x \leq -3 \quad \text{ή} \quad x \geq 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

Οπότε, $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

β' τρόπος (καλός τρόπος κι αυτός και κλασικός όταν έχω τριώνυμο κάτω από ρίζα)

Παρατηρώ ότι το $x^2 - 9$ είναι ένα τριώνυμο. Το λύνω για να βρω τις ρίζες του.

[μπορώ να το λύσω με διακρίνουσα αλλά αν το παρατηρήσω λύνεται πολύ πιο γρήγορα]

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow |x| = 3 \Leftrightarrow x = \pm 3, \text{ άρα έχει ρίζες το } -3 \text{ και το } +3.$$

Κάνω τώρα 'πινακάκι' και υπολογίζω το πρόσημο τριωνύμου

	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
	ομόσημο του α, άρα	ετερόσημο του α, άρα	ομόσημο του α, άρα	
$x^2 - 9$	+	0	0	+

Άρα αφού εγώ θέλω το $x^2 - 9$ να είναι μη αρνητικό (δηλαδή θέλω $x^2 - 9 \geq 0$), από το πινακάκι απαντάω: πρέπει $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ Άρα τελικά: $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

γ' τρόπος (λίγο πιο αργός)

Παρατηρώ ότι το $x^2 - 9$ είναι μια διαφορά τετραγώνων, δηλαδή $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

Κάνω πινακάκι και υπολογίζω το πρόσημο τριωνύμου

	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
$x+3$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+
$x^2 - 9$	+	0	-	+

Και πάλι αφού εγώ θέλω το $x^2 - 9$ να μην είναι αρνητικό, από το πινακάκι απαντάω:

Πρέπει $x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ Άρα τελικά: $A = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

Παρατήρηση

Εννοείται ότι όποιον τρόπο και να χρησιμοποιήσετε για να λύσετε την άσκηση είναι ολόσωστος.

8. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 3x - 2 + \sqrt{-x^2 + x + 2}$

Λύση

Πάλι έχουμε μια ρίζα, άρα πρέπει $-x^2 + x + 2 \geq 0$

Εδώ δεν λειτουργεί ο **α' τρόπος** που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη άσκηση, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τον **β' τρόπο**.

Βρίσκουμε αρχικά τις ρίζες της εξίσωσης $-x^2 + x + 2 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9 \text{ Άρα οι ρίζες είναι:}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \boxed{x_1 = -1} \\ \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2} \end{cases}$$

Και φτιάχνουμε πάλι το πινακάκι:

	$-\infty$	-3	$+3$	$+\infty$
	ομόσημο του α, άρα	ετερόσημο του α, άρα	ομόσημο του α, άρα	
$-x^2 + x + 2$		0	0	
	-	+	-	

Άρα αφού εγώ θέλω το $-x^2 + x + 2$ να μην είναι αρνητικό (δηλαδή θέλω $-x^2 + x + 2 \geq 0$) από το πινακάκι απαντάω: πρέπει $x \in [-3, 3]$ Άρα τελικά: $A = [-3, 3]$

9. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{\sqrt{6 - 2x}}$

Λύση

Παρατηρήστε ότι εδώ υπάρχει πάλι μια ρίζα η οποία όμως είναι στον παρονομαστή.

Άρα στην πραγματικότητα έχω δύο περιορισμούς:

- Η ποσότητα $6 - 2x$ να μην είναι αρνητική (αφού είναι υπόριζο), και
- Η ποσότητα $\sqrt{6 - 2x}$ να μην είναι ίση με το μηδέν (αφού είναι στον παρονομαστή)

$$\text{Άρα, έχω } \left. \begin{matrix} 6 - 2x \geq 0 \\ \sqrt{6 - 2x} \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 6 \geq 2x \\ 6 - 2x \neq 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 2x \leq 6 \\ 2x \neq 6 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x \leq 3 \\ x \neq 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \text{και τελικά } \boxed{x < 3}$$

[τα παραπάνω θα μπορούσα να τα πω πιο γρήγορα ως εξής:

Πρέπει $6 - 2x > 0 \Leftrightarrow 6 > 2x \Leftrightarrow 2x < 6 \Leftrightarrow x < 3]$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι: $A = (-\infty, 3)$

Παρατηρήστε τώρα την άσκηση αυτή και κάντε μια σύγκριση με την άσκηση 6. Τι άλλαξε; Στην άσκηση 6 είχα τη ρίζα $\sqrt{6-2x}$ και είπα ότι πρέπει $6-2x \geq 0$ και κατέληξα στο $A = (-\infty, 3]$.

Εδώ, είχα την ίδια ρίζα αλλά την είχα στον παρονομαστή, άρα αυτό που άλλαξε ήταν ότι αντί να πούμε ότι πρέπει $6-2x \geq 0$, τώρα είπαμε ότι πρέπει $6-2x > 0$ και καταλήξαμε στο $A = (-\infty, 3)$

10. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{7x+1}{\sqrt{-x^2+x+2}}$

Λύση

Παρατηρήστε και εδώ την ομοιότητα που υπάρχει με την άσκηση 8. Έχουμε την ίδια ακριβώς ρίζα, απλά την έχουμε στον παρονομαστή. Άρα αντί να πούμε ότι πρέπει $-x^2+x+2 \geq 0$, τώρα θα πούμε ότι πρέπει $-x^2+x+2 > 0$.

Άρα θα κάνουμε ακριβώς την ίδια διαδικασία που κάναμε στην άσκηση 8 και στο τέλος θα γράψουμε:

Άρα αφού $-x^2+x+2 > 0$ από το πινακάκι απαντάω: πρέπει $x \in (-3, 3)$ Άρα τελικά: $A = (-3, 3)$

11. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x-2\sqrt{|x-3|-4}}{x^2+3}$

Λύση

Εδώ βλέπω ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Όμως ο δεύτερος περιορισμός δεν χρειάζεται γιατί η ποσότητα x^2+3 που είναι στον παρονομαστή είναι πάντα θετική, άρα δεν υπάρχει φόβος να γίνει μηδέν. (βλέπε και άσκηση 4). Άρα θα ασχοληθώ μόνο με τον πρώτο περιορισμό.

Πρέπει $|x-3|-4 \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow x-3 \leq -4 \quad \text{ή} \quad x-3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 3-4 \quad \text{ή} \quad x \geq 3+4 \Leftrightarrow$
 $x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$

Άρα τελικά $A = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$.

12. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x^3-2x^2-7}{\sqrt{|x-3|-4}}$

Λύση

Η μόνη αλλαγή σε σχέση με πριν είναι ότι η ρίζα βρίσκεται στον παρονομαστή. Άρα δεν θα ξεκινήσω με $|x-3|-4 \geq 0$ αλλά με $|x-3|-4 > 0$ και κάνοντας τις ίδιες πράξεις καταλήγω:

$|x-3|-4 > 0 \Leftrightarrow |x-3| > 4 \Leftrightarrow x-3 < -4 \quad \text{ή} \quad x-3 > 4 \Leftrightarrow x < 3-4 \quad \text{ή} \quad x > 3+4 \Leftrightarrow$
 $x < -1 \quad \text{ή} \quad x > 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

Και τελικά απαντάω ότι $A = (-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$

13. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x - 2\sqrt{|x-3|} - 4}{x+1}$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Άρα πρέπει (κάνω ό,τι έκανα στην άσκηση 11)

$|x-3|-4 \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow x-3 \leq -4 \quad \text{ή} \quad x-3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 3-4 \quad \text{ή} \quad x \geq 3+4 \Leftrightarrow$
 $x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty) \quad (1)$

Και επίσης πρέπει: $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1 \quad (2)$

Τώρα πρέπει να συναληθεύσω τους περιορισμούς (1) και (2), να καταλήξω δηλαδή σε έναν περιορισμό που να έχει μέσα τους και τους δύο.

Τελικά απαντάω ότι $A = (-\infty, -1) \cup [7, +\infty)$

14. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{5x - 2\sqrt{|x-3|} - 4}{x-1}$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

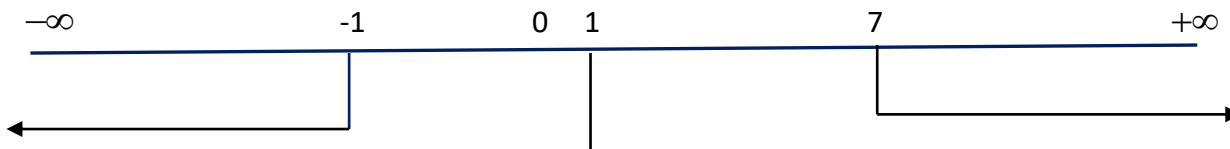
Κάνω ό,τι έκανα στην άσκηση 13

$|x-3|-4 \geq 0 \Leftrightarrow |x-3| \geq 4 \Leftrightarrow x-3 \leq -4 \quad \text{ή} \quad x-3 \geq 4 \Leftrightarrow x \leq 3-4 \quad \text{ή} \quad x \geq 3+4 \Leftrightarrow$
 $x \leq -1 \quad \text{ή} \quad x \geq 7 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [7, +\infty) \quad (1)$

Και επίσης πρέπει: $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \quad (2)$

Τώρα πρέπει να συναληθεύσω τους περιορισμούς (1) και (2), να καταλήξω δηλαδή σε έναν περιορισμό που να έχει μέσα τους και τους δύο. Παρατηρήστε όμως ότι με τον περιορισμό (1) είστε καλυμμένοι αφού ο "κακός" αριθμός 1 είναι ούτως ή άλλως εκτός. (βλέπε σχήμα παρακάτω)

Άρα τελικά απαντάω $A = (-\infty, -1] \cup [7, +\infty)$



$$15. \text{Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x) = \frac{5x - 2\sqrt{4 - |x - 3|}}{x - 1}$$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μια ρίζα (άρα ότι είναι μέσα πρέπει να είναι θετικό), και
- Έναν παρονομαστή που πρέπει να είναι διαφορετικός από το μηδέν.

Άρα έχω:

$$4 - |x - 3| \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq |x - 3| \Leftrightarrow |x - 3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow -4 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 4 + 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow x \in [-1, 7]$$

Επίσης ο δεύτερος περιορισμός δίνει: $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

Συναληθεύω και πάλι τους δύο περιορισμούς και καταλήγω πρέπει $x \in [-1, 7] - \{1\} = [-1, 1) \cup (1, 7]$ και

άρα τελικά απαντάω ότι $A = [-1, 7] - \{1\} = [-1, 1) \cup (1, 7]$

(με όποιον και από τους δύο τρόπους και αν γράψετε το A είναι το ίδιο)

$$16. \text{Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x) = \frac{6x^4 - 9}{|x^2 - 1| - 1} + \frac{3x}{|3x - 4| - 5} - \frac{2}{|x - 6| + 7}$$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω τρεις παρονομαστές που πρέπει να είναι διαφορετικοί από το μηδέν.

Άρα πρέπει:

$$|x^2 - 1| - 1 \neq 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| \neq 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \neq \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 \neq -1 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

$$|3x - 4| - 5 \neq 0 \Leftrightarrow |3x - 4| \neq 5 \Leftrightarrow 3x - 4 \neq \pm 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \neq 5 \Leftrightarrow 3x \neq 9 \Leftrightarrow x \neq 3 \\ 3x - 4 \neq -5 \Leftrightarrow 3x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$|x - 6| + 7 \neq 0 \Leftrightarrow |x - 6| \neq -7 \text{ που ισχύει πάντα αφού ένα απόλυτα είναι πάντα μη αρνητικό.}$$

$$\text{Άρα τελικά έχω ότι } A = \mathbb{R} - \left\{ -\sqrt{2}, -\frac{1}{3}, 0, \sqrt{2}, 3 \right\}$$

$$17. \text{Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης } f(x) = 5x - 2\sqrt{4 - |x - 3|} + \frac{3x}{\sqrt{x - 1}}$$

Λύση

Εδώ βλέπω και πάλι ότι έχω δύο προβλήματα:

- Μία ρίζα (και άρα ότι έχει μέσα πρέπει να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν), και
- Μια ρίζα σε παρονομαστή οπότε ότι έχει μέσα πρέπει να είναι μεγαλύτερο από το μηδέν.

Κώστας Χρυσανθόπουλος, Μ.Εδ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών,
konkris1@sch.gr, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

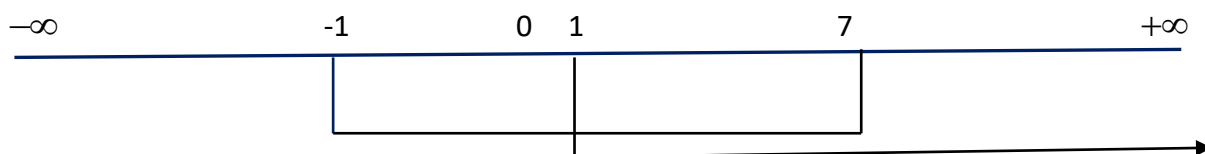
Άρα πρέπει:

$$4 - |x - 3| \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq |x - 3| \Leftrightarrow |x - 3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow$$

ιδιότητα
απολύτων

$$-4 + 3 \leq x - 3 + 3 \leq 4 + 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow x \in [-1, 7] \quad (1)$$

Και επίσης πρέπει: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \quad (2)$



Συναληθεύω τους δύο περιορισμούς και καταλήγω ότι ο κοινός περιορισμός είναι:

$$x \in (1, 7] \text{ άρα τελικά } A = (1, 7]$$

Παρατήρηση

Οι συνδυασμοί που μπορούν να γίνουν με συναλήθευση ανισώσεων είναι πολλοί και δεν έχει νόημα να γίνουν πολλές ίδιες ασκήσεις. Αν αντιμετωπίζετε πρόβλημα με τις ανισώσεις και την συναλήθευσή τους, τότε δείτε τα βίντεο: https://youtu.be/Q0lOhIE2_vI και <https://youtu.be/mjhVsBa2Q0s>

Ασκήσεις στα πεδία ορισμού

Βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

1. $f(x) = \sqrt{7x-3}x^2$

2. $f(x) = \frac{5x-3}{2x-6}$

3. $f(x) = \frac{3x^4-2x+1}{x^4+7}$

4. $f(x) = \frac{3x^4-2\sqrt{6-3x}}{x^4+7}$

5. $f(x) = \frac{3x-8}{x^2-5x+6}$

6. $f(x) = \sqrt{x^2-5x+6}$

7. $f(x) = \frac{3x-2}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

8. $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{3x-10}$

9. $f(x) = \sqrt{x^2-9} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

10. $f(x) = \sqrt{9-x^2} - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

21. $f(x) = \frac{5x-1}{\sqrt{8-|x-5|}} + \frac{7x}{2x-4}$

11. $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \frac{6-x}{\sqrt{2x-6}}$

12. $f(x) = \sqrt{9-x^2} - \frac{1}{\sqrt{2x-6}}$

13. $f(x) = \sqrt{9-x^2} - 3\sqrt{2x-6}$

14. $f(x) = \sqrt{1-x^2} - 3\sqrt{x^2-4}$

15. $f(x) = \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{4-x^2}$

16. $f(x) = \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{-x^2+2x+3}$

17. $f(x) = \sqrt{x^2-1} - 3x + \frac{2x^2-5x}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$

18. $f(x) = \frac{3x^2-5x}{|3x-9|-5}$

19. $f(x) = \frac{3x^2-5x-1}{\sqrt{|x-5|-8}}$

20. $f(x) = \frac{3x^2-5x-1}{\sqrt{8-|x-5|}}$

Β. Επιπρόσθετες ασκήσεις σε συναρτήσεις – Πεδίο Ορισμού - Τιμές

22. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x \leq 0 \\ 2x + 1, & x > 0 \end{cases}$ για την οποία γνωρίζουμε

ότι $f(-1) = 2$.

A. Να αποδείξετε ότι $a = 1$

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = f(-x) + 1$

23. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

A. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$

B. $f(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

Γ. $f(x) = \sqrt{1 - \frac{3x}{x^2 + 2}}$

Δ. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

Ε. $f(x) = \frac{x}{1 - \ln x}$

ΣΤ. $f(x) = \ln(1 - x)$

Ζ. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Η. $f(x) = \sqrt{2 \ln x - 3}$

Θ. $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - \ln x}$

Ι. $f(x) = \frac{2}{8^{x+2} - 16^{x+1}}$

ΙΑ. $f(x) = \sqrt{4^{x+2} - 8^{2x}}$

ΙΒ. $f(x) = \ln(\ln x)$

24. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .

B. Να αποδείξετε ότι $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$ για κάθε $x \in A$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - ax + 1}$. Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε το πεδίο ορισμού της f να είναι το σύνολο $A = \mathbb{R}$.

26. Από τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων που ακολουθούν να βρείτε δύο αριθμούς α, β τέτοιους, ώστε να ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

A. $f(x) = x^3 - 2$

B. $f(x) = x^3 + x$

Γ. $f(x) = e^{x^3} - 3x$

Δ. $f(x) = 3 \ln x - x$

Ε. $f(x) = 2^x - x^3$

ΣΤ. $f(x) = x - 2 \eta \mu x$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x - x^3, & x < 0 \\ x^2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$

A. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6$

B. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει ότι: $g(x) = f(x) - f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $g(x) = 0$

A. Η συνάρτηση $y = ax$

Η συνάρτηση $y = ax$ παριστάνει μια ευθεία που διέρχεται πάντα από την αρχή των αξόνων.

Το a είναι τυχαίος πραγματικός αριθμός.

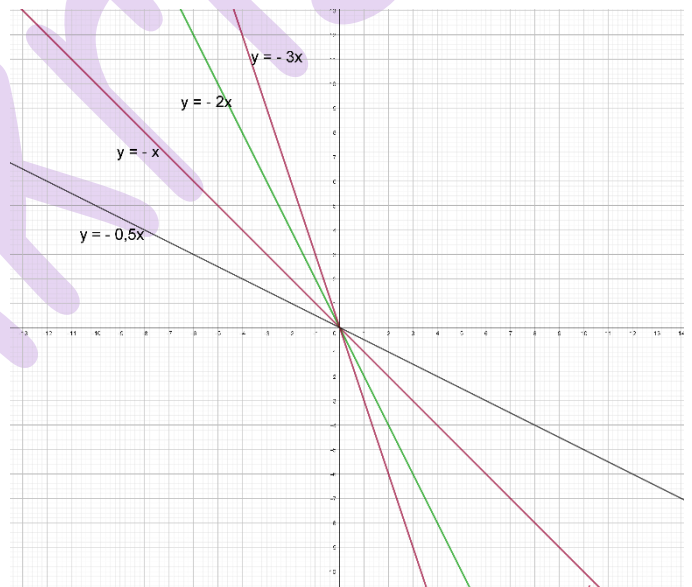
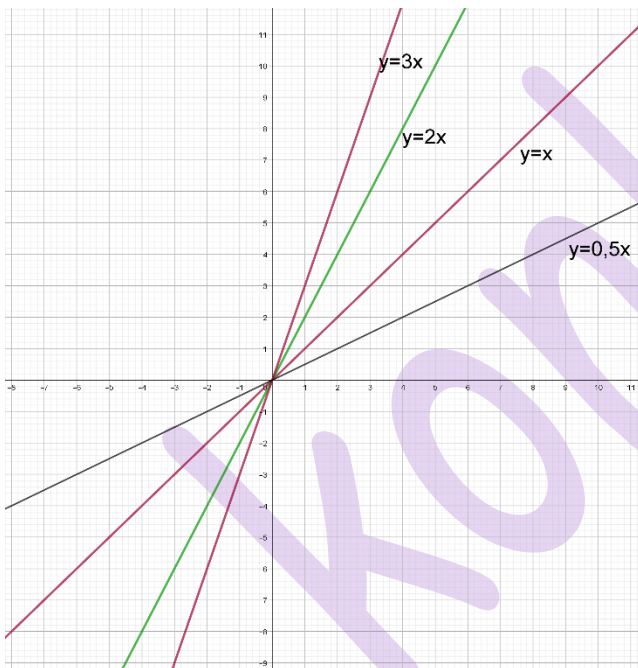
Για παράδειγμα: $y = x$ ($a=1$), $y = 3x$ ($a=3$), $y = -2x$ ($a = -2$), $y = 3,4x$ ($a = -3,4$) κ.λπ.

Για την ευθεία $y = ax$ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον αριθμό a

$a > 0$

$a < 0$



Όπως παρατηρούμε όταν το a είναι θετικός αριθμός η ευθεία βρίσκεται στο 1^ο και το 3^ο τεταρτημόριο.

Επίσης όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός a τόσο πιο 'όρθια' είναι η ευθεία.

Αντίστοιχα, όταν το a είναι αρνητικός αριθμός, τότε η ευθεία βρίσκεται στο 2^ο και το 4^ο τεταρτημόριο.

Επίσης και εδώ όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός a (κατ' απόλυτη τιμή) τόσο πιο 'όρθια' είναι η ευθεία.

Επειδή το a καθορίζει στην πραγματικότητα την κλίση της ευθείας, ονομάζεται **κλίση** της ευθείας ή **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας. Ο αριθμός a ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$, δηλαδή $a = \epsilon\phi\omega$.

Για αναλυτική παρουσίαση της συνάρτησης $y = ax$, δείτε το βίντεο: <https://youtu.be/zcDPhaew5F4>

B. Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$

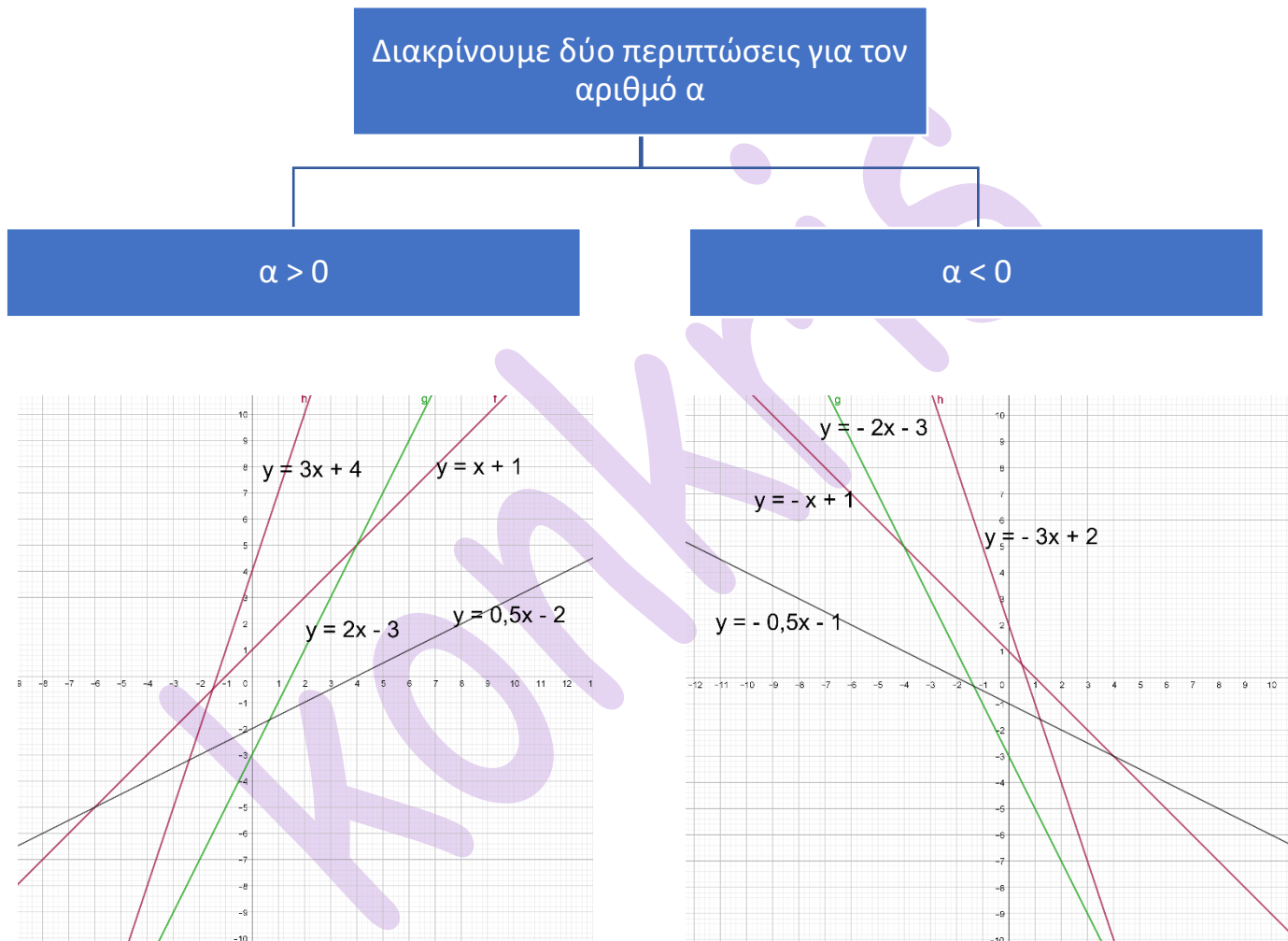
Η συνάρτηση $y = \alpha x + \beta$ παριστάνει μια ευθεία που ΔΕΝ διέρχεται από την αρχή των αξόνων (όταν $\beta \neq 0$).

Τα α και β είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = \alpha x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, \beta)$

Για παράδειγμα: $y = x - 3$ ($\alpha=1$ και $\beta = -3$), $y = 3x + 2$ ($\alpha=3$ και $\beta = 2$), $y = -2x + \frac{1}{4}$ ($\alpha = -2$ και $\beta = \frac{1}{4}$), $y = 3,4x - 5$ ($\alpha = -3,4$ και $\beta = -5$) κ.λπ.

Για την ευθεία $y = \alpha x$ διακρίνουμε και πάλι δύο περιπτώσεις ανάλογα με το α :



Όπως παρατηρούμε όταν το α είναι θετικός αριθμός η ευθεία βρίσκεται και πάλι κατά το μεγαλύτερο μέρος της στο 1^ο και το 3^ο τεταρτημόριο. Επίσης όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός α τόσο πιο 'όρθια' είναι η ευθεία.

Αντίστοιχα, όταν το α είναι αρνητικός αριθμός, τότε η ευθεία βρίσκεται και πάλι κατά το μεγαλύτερο μέρος της στο 2^ο και το 4^ο τεταρτημόριο. Επίσης και εδώ όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός α (κατά απόλυτη τιμή) τόσο πιο 'όρθια' είναι η ευθεία.

Επειδή το α καθορίζει στην πραγματικότητα την κλίση της ευθείας, και εδώ ονομάζεται **κλίση** της ευθείας ή **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας.

Παρατηρήστε επίσης τα σχήματα που δίνονται παραπάνω.

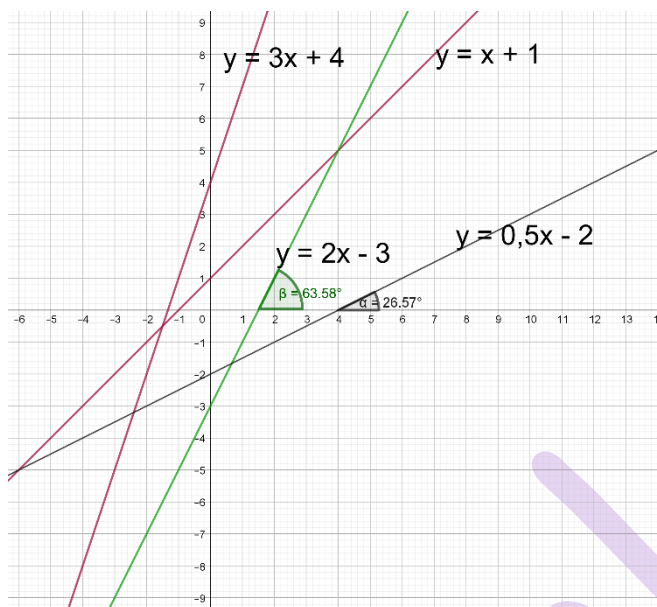
Για παράδειγμα, η ευθεία $y = 3x + 4$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στη σημείο $(0, 4)$.

Η ευθεία $y = 2x - 3$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στη σημείο $(0, -3)$.

Η ευθεία $y = -x + 1$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στη σημείο $(0, 1)$

Άρα επιβεβαιώνουμε αυτό που είπαμε ότι η ευθεία $y = ax + \beta$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στη σημείο $(0, \beta)$.

Και εδώ ισχύει ότι επειδή το a καθορίζει στην πραγματικότητα την κλίση της ευθείας, ονομάζεται **κλίση** της ευθείας ή **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας. Ο αριθμός a ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$, δηλαδή $a = \epsilon\phi\omega$.



Για παράδειγμα δείτε το διπλανό σχήμα:

Η ευθεία $y = 0,5x - 2$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 26,57^\circ$.

Αν χρησιμοποιήσουμε έναν υπολογιστή θα βρούμε ότι $\epsilon\phi\omega = \epsilon\phi 26,57^\circ = 0,5$, όσο δηλαδή το a της ευθείας.

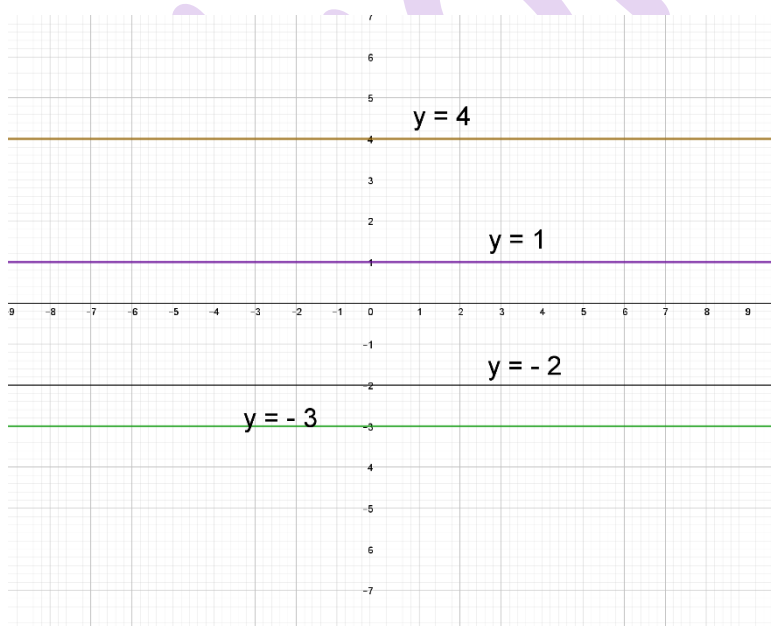
Ομοίως, η ευθεία $y = 2x - 3$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 63,58^\circ$.

Αν χρησιμοποιήσουμε έναν υπολογιστή θα βρούμε ότι $\epsilon\phi\omega = \epsilon\phi 63,58^\circ = 2$, όσο δηλαδή το a της ευθείας.

Τι γίνεται αν το $a = 0$; Με βάση όσα είπαμε πιο πάνω,

$a = 0$ σημαίνει ότι $\epsilon\phi\omega = 0$. Άρα η ευθεία θα σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 0° , άρα **η ευθεία θα είναι παράλληλη με τον άξονα $x'x$** .

Επίσης, αφού $a = 0$, άρα ο τύπος θα γίνει $y = 0x + \beta$, άρα **$y = \beta$** .



Άρα, όπως μπορούμε να δούμε στο διπλανό σχήμα, η ευθεία $y = 4$ είναι μια ευθεία 'οριζόντια', δηλαδή παράλληλη με τον άξονα $x'x$ που κόβει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 4.

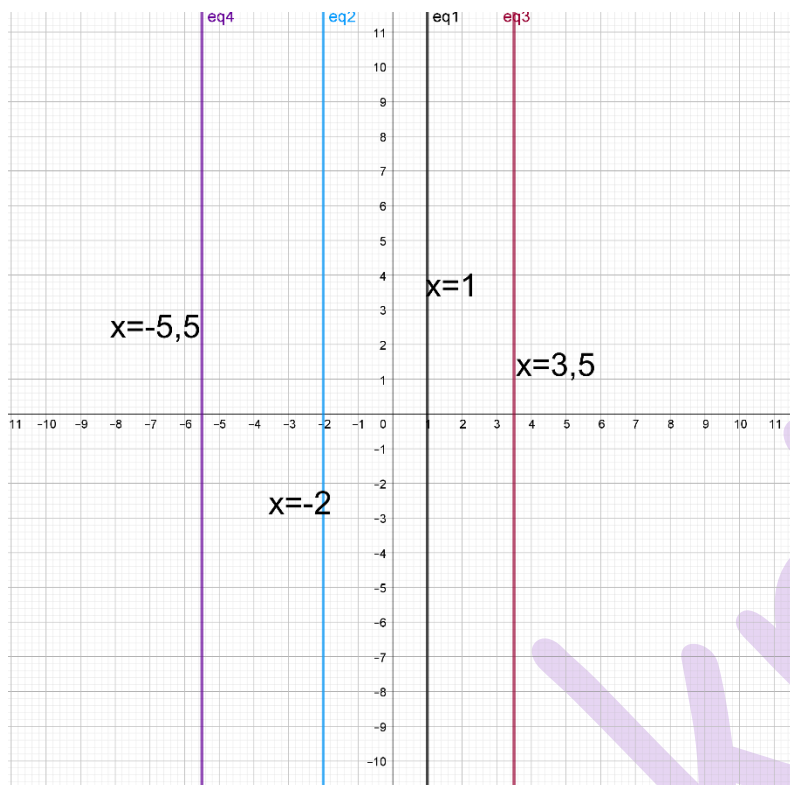
Ομοίως, η ευθεία $y = -2$ είναι μια ευθεία 'οριζόντια', δηλαδή παράλληλη με τον άξονα $x'x$ που κόβει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη -2 .

Και ο ίδιος ο άξονας $x'x$ είναι μια ευθεία με τύπο $y = 0$.

Οι τύποι των συναρτήσεων $y = ax$ και $y = ax + \beta$ καλύπτουν όλες τις ευθείες του επιπέδου εκτός από μια περίπτωση: τις κατακόρυφες ευθείες.

ΠΡΟΣΟΧΗ!! Οι κατακόρυφες ευθείες ΔΕΝ είναι συναρτήσεις, οπότε δεν μπορούν να περιγραφούν με κάποιον από τους παραπάνω τύπους.

Άρα, τι τύπο έχουν οι κατακόρυφες ευθείες;



Οι κατακόρυφες ευθείες, δηλαδή οι ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα $x'x$, έχουν τύπο της μορφής:

$x = \text{αριθμός}$.

Όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, η ευθεία $x = -2$ είναι μια «κατακόρυφη» ευθεία (κάθετη δηλαδή στον άξονα $x'x$) που τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη -2 .

Ομοίως, η ευθεία $x = 3,5$ είναι μια «κατακόρυφη» ευθεία (κάθετη δηλαδή στον άξονα $x'x$) που τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη $3,5$.

Και ο άξονας $y'y$ είναι μια «κατακόρυφη» ευθεία με τύπο $x = 0$.

Για αναλυτική παρουσίαση της ευθείας $y = ax + b$, καθώς και της «κατακόρυφης» ευθείας, δείτε το βίντεο: <https://youtu.be/Krd5SHr-jiM>

Γ. Η Συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ Υπερβολή

Η συνάρτηση $y = \frac{\alpha}{x}$ ορίζεται για $x \neq 0$ και ονομάζεται υπερβολή. Ανάλογα με το α διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $\alpha > 0$

Τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα στη συνέχεια, η γραφική παράσταση αποτελείται από δύο κομμάτια, δύο κλάδους, όπως λέμε, που βρίσκονται στο πρώτο και στο τρίτο τεταρτημόριο. Οι κλάδοι αυτοί είναι συμμετρικοί μεταξύ τους και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όσο μεγαλώνει το α τόσο οι κλάδοι απομακρύνονται μεταξύ τους.

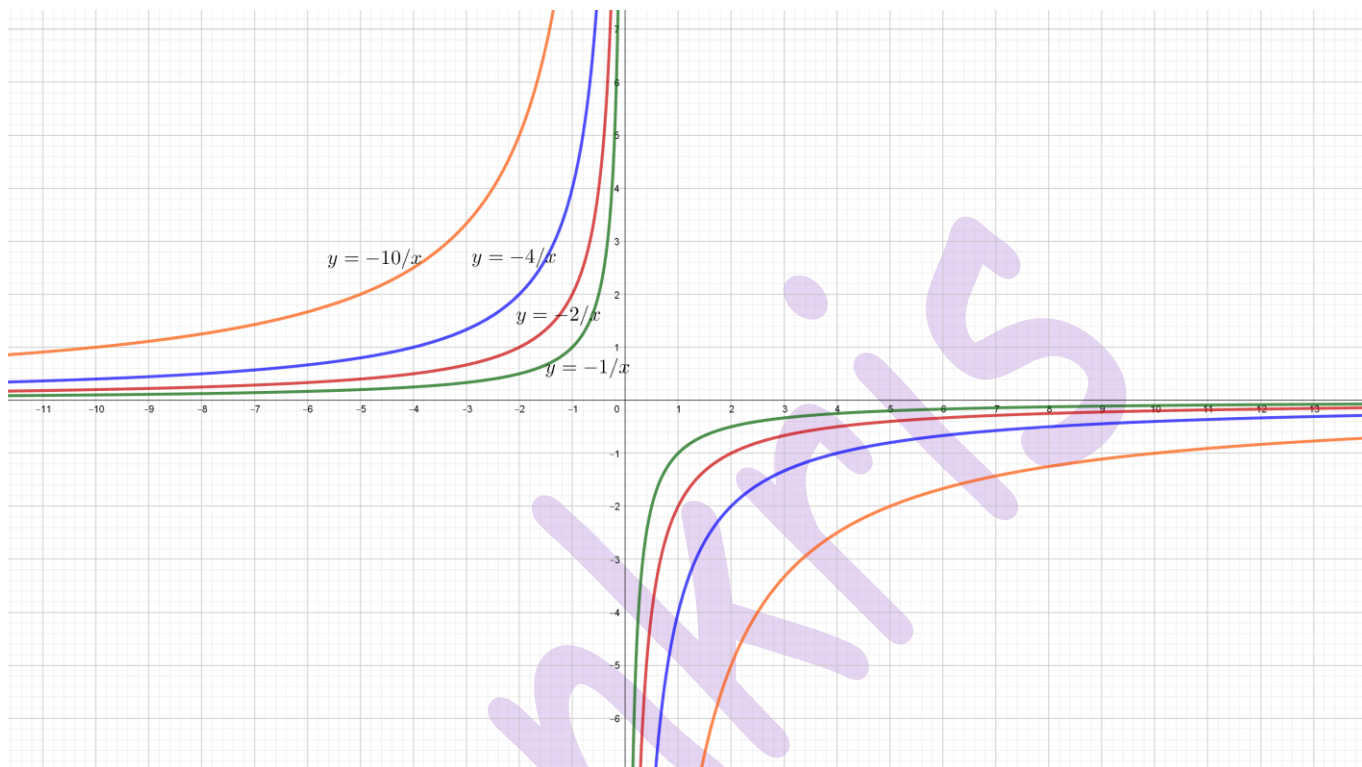


Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι οι κλάδοι της υπερβολής δεν ακουμπούν ποτέ στους άξονες. Αν και φαίνεται σαν να ακουμπούν, αν κάναμε μεγέθυνση στο σχήμα θα βλέπαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν ακουμπά ποτέ στους άξονες.

Για να το πούμε αυτό με πιο μαθηματική γλώσσα, οι άξονες $x'x$ και $y'y$ είναι **ασύμπτωτες** της γραφικής παράστασης της υπερβολής.

2. $\alpha < 0$

Τότε, όπως φαίνεται στο σχήμα στη συνέχεια, η γραφική παράσταση αποτελείται από δύο κομμάτια, δύο κλάδους, όπως λέμε, που βρίσκονται στο δεύτερο και στο τέταρτο τεταρτημόριο. Οι κλάδοι αυτοί είναι συμμετρικοί μεταξύ τους και όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα όσο μεγαλώνει το α τόσο οι κλάδοι απομακρύνονται μεταξύ τους.



Και εδώ φυσικά ισχύει ότι οι κλάδοι της υπερβολής δεν ακουμπούν ποτέ στους άξονες. Αν και φαίνεται σαν να ακουμπούν, αν κάναμε μεγέθυνση στο σχήμα θα βλέπαμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν ακουμπά ποτέ στους άξονες. Δηλαδή και εδώ ισχύει ότι οι άξονες x' και y' είναι **ασύμπτωτες** της γραφικής παράστασης της υπερβολής.

Γ. Η Συνάρτηση $y = ax^2$ Παραβολή

Η συνάρτηση $y = ax^2$ παριστάνει μια καμπύλη που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και ονομάζεται **παραβολή**. Το a είναι τυχαίος πραγματικός αριθμός.

Για την παραβολή $y = ax^2$ διακρίνουμε και πάλι δύο περιπτώσεις ανάλογα με το a :

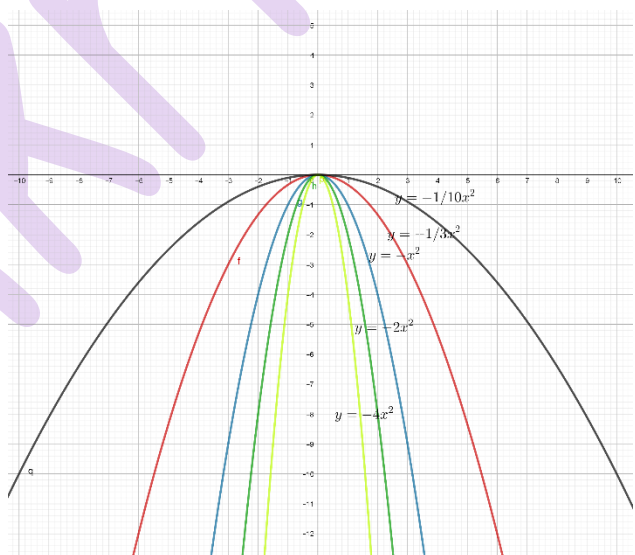
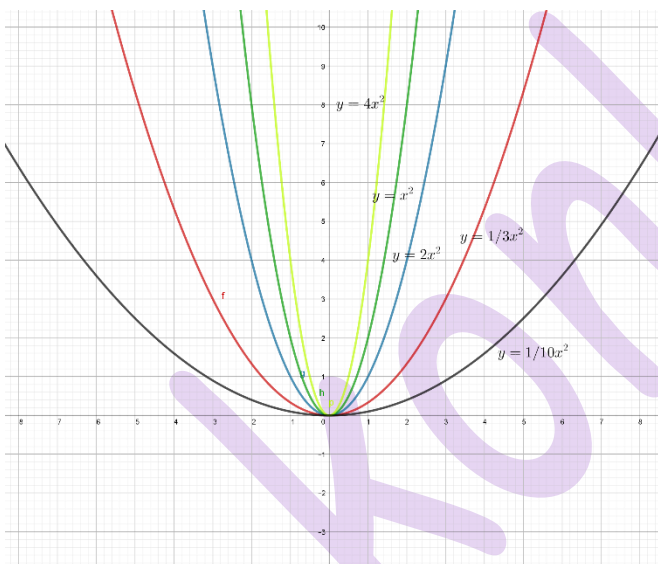
Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για τον αριθμό a

$$a > 0$$

Καμπύλη που το άνοιγμά της κοιτάζει προς τα πάνω

$$a < 0$$

Καμπύλη που το άνοιγμά της κοιτάζει προς τα κάτω.



Όπως παρατηρούμε, όσο μικρότερος είναι ο αριθμός a (κατ' απόλυτη τιμή) τόσο πιο 'ανοιχτή' είναι η καμπύλη της παραβολής ενώ όσο πιο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός τόσο πιο 'στενή' είναι, τόσο πιο απότομα ανεβαίνει ή κατεβαίνει.

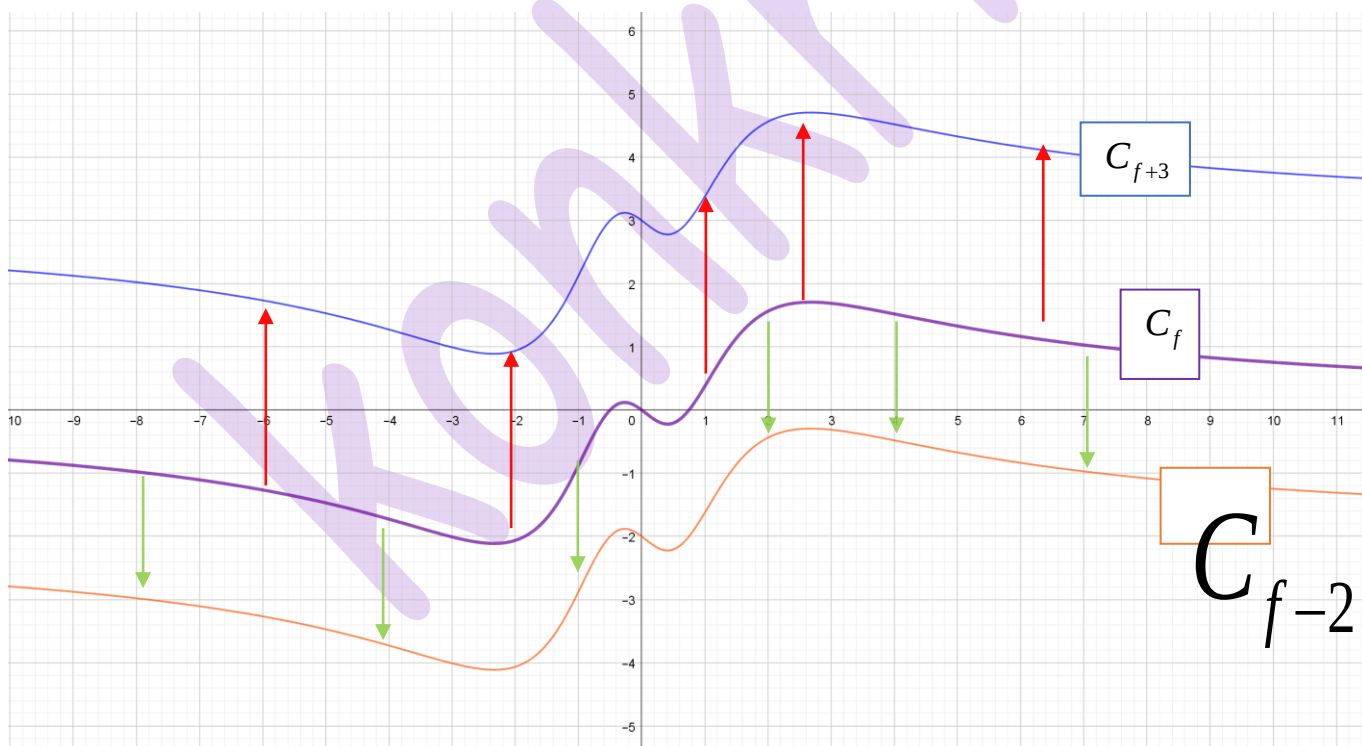
Δ. Μετατοπίσεις Γραφικών Παραστάσεων

Έστω μια συνάρτηση $f : A \rightarrow B$ με γραφική παράσταση C_f . Θα μελετήσουμε τι μεταβολές συμβαίνουν στη γραφική της παράσταση όταν 'πειράξω' τον τύπο της συνάρτησης.

Θα εξετάσουμε 5 μεταβολές.

1. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν στον τύπο της συνάρτησης προσθέσουμε στο τέλος έναν αριθμό c (δηλαδή φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = f(x) + c$), τότε η νέα γραφική παράσταση C_{f+c} θα είναι η αρχική γραφική παράσταση 'ανεβασμένη' προς τα πάνω ή 'κατεβασμένη' προς τα κάτω όσο είναι ο αριθμός c .

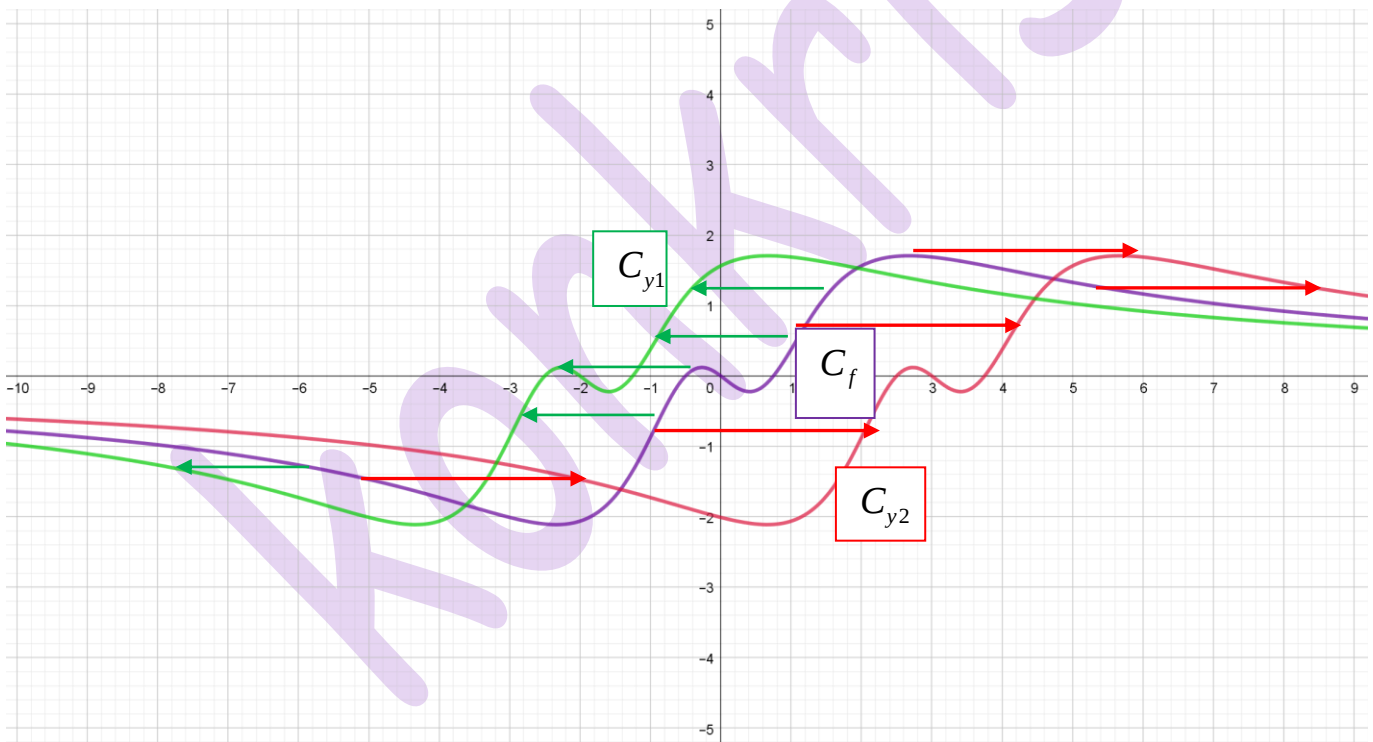
Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την C_{f+3} (τα **κόκκινα βέλη** δείχνουν ότι 'σπρώξαμε' την C_f προς τα πάνω 3 μονάδες) και δείτε και την C_{f-2} (τα **πράσινα βέλη** δείχνουν ότι 'σπρώξαμε' την C_f προς τα κάτω 2 μονάδες).



Θα δούμε και τη μεταβολή 2 και μετά θα δούμε κάποια παραδείγματα

2. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν στον τύπο της συνάρτησης προσθέσουμε στο x έναν αριθμό c (δηλαδή φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = f(x+c)$), τότε η νέα γραφική παράσταση C_g θα είναι η αρχική γραφική μετατοπισμένη δεξιά αριστερά αντίστροφα από ότι λέει ο αριθμός c . Δηλαδή αν μας ζητήσουν τη συνάρτηση $y = f(x+3)$ θα 'σπρώξω' τη γραφική παράσταση της C_f προς τα αριστερά 3 μονάδες, ενώ αν μας ζητήσουν την γραφική παράσταση της $y = f(x-2)$ θα 'σπρώξω' τη γραφική παράσταση της C_f προς τα δεξιά 2 μονάδες.

Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση $y = f(x)$ με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την $y_1 = f(x-3)$ (τα **κόκκινα βέλη** δείχνουν ότι 'σπρώξαμε' την C_f προς τα δεξιά 3 μονάδες και προέκυψε η C_{y1}) και δείτε και την $y_2 = f(x+2)$ (τα **πράσινα βέλη** δείχνουν ότι σπρώξαμε' την C_f προς τα αριστερά 2 μονάδες και προέκυψε η C_{y2}).



Πριν προχωρήσουμε στις επόμενες μεταβολές, θέλουμε να τονίσουμε ότι αυτές οι δύο μετατοπίσεις είναι πολύ σημαντικές και επίσης χρειάζεται προσοχή γιατί μερικές φορές οι μαθητές τις μπερδεύουν μεταξύ τους.

Έτσι, αν για παράδειγμα ξεκινήσουμε από τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, τότε αν σας ζητήσουν να φτιάξετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ τότε έχουμε την πρώτη περίπτωση, δηλαδή 'σπρώχνουμε' την $f(x) = \frac{1}{x}$ προς τα

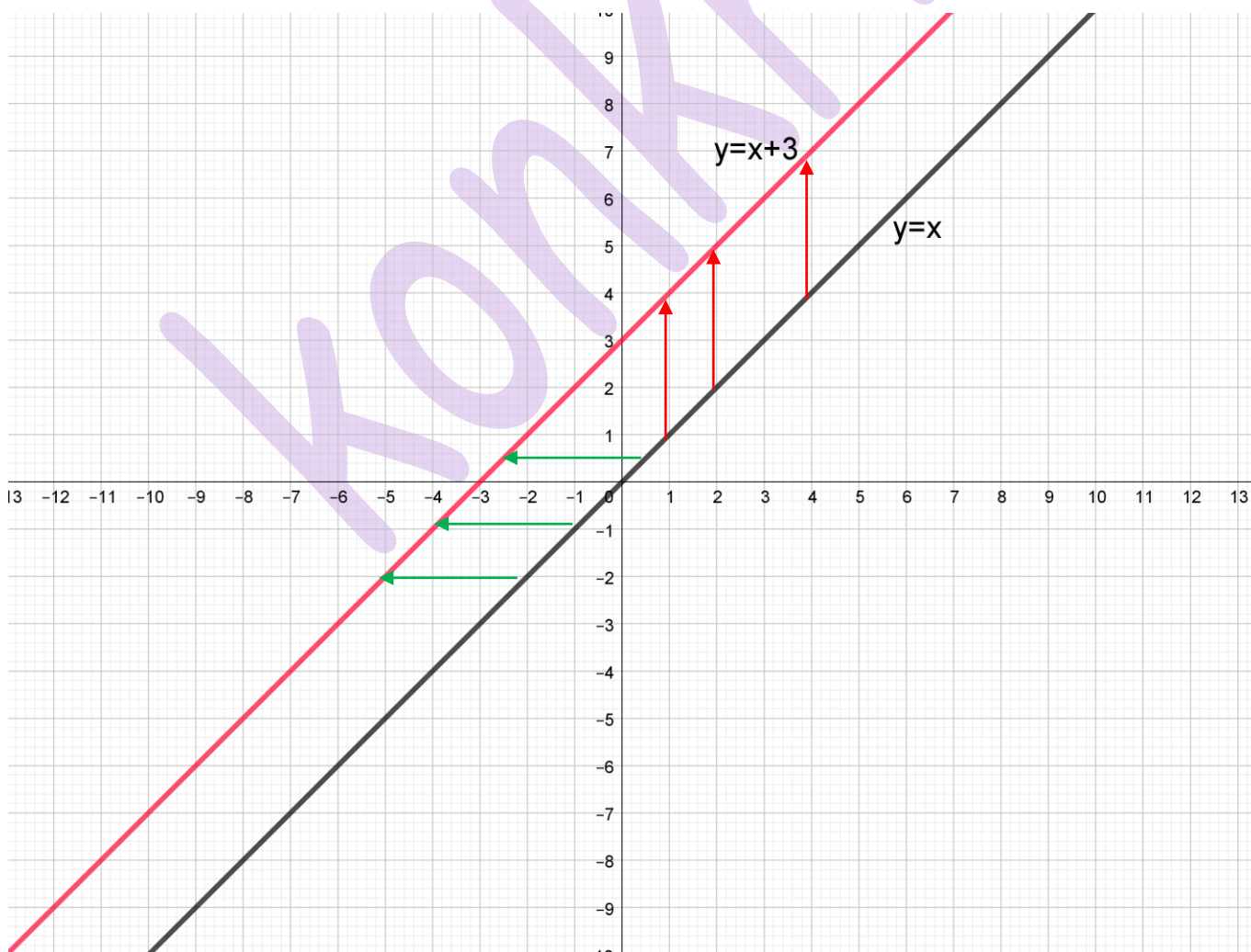
πάνω κατά 1 μονάδα. Ενώ αν σας ζητήσουν να φτιάξετε την $f(x) = \frac{1}{x+1}$, τότε έχουμε τη δεύτερη μεταβολή, δηλαδή τώρα το +1 επηρεάζει μόνο το x και όχι όλο τον τύπο. Άρα τώρα θα σπρώξουμε την $f(x) = \frac{1}{x}$ προς τα αριστερά κατά 1 μονάδα.

Επίσης να θυμόμαστε ότι **ειδικά για την συνάρτηση $y = x$ και μόνο για αυτή, οι δυο μεταβολές που περιγράψαμε ταυτίζονται.**

Για παράδειγμα, αν μας ζητήσουν να φτιάξουμε την $y = x+3$, τότε μπορούμε να σκεφτούμε και με τους δύο τρόπους:

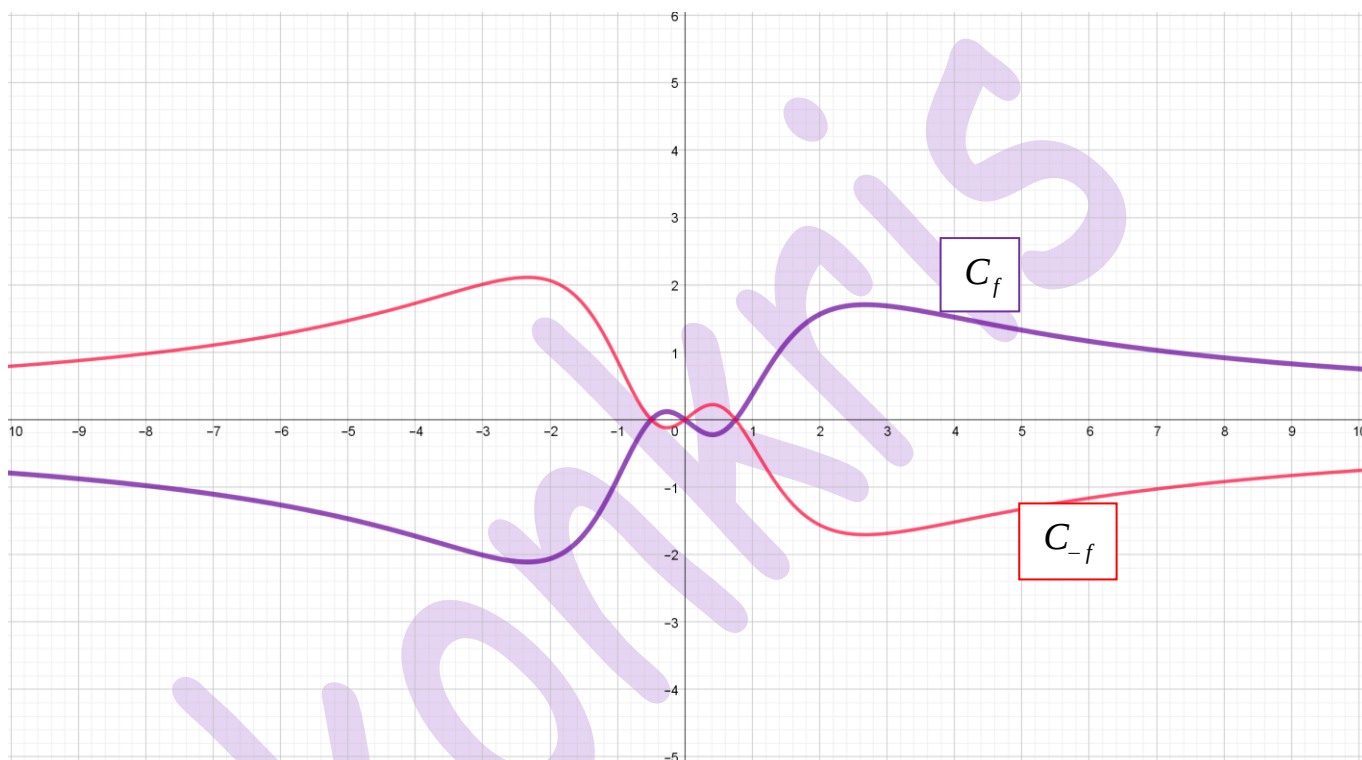
- Ο ένας μαθητής μπορεί να πει: Παίρνω την $y = x$ και της προσθέτω στο τέλος τον αριθμό 3, άρα σύμφωνα με την 1^η μεταβολή θα σπρώξω την $y = x$ προς τα πάνω 3 μονάδες (**κόκκινα βέλη** στο παρακάτω σχήμα).
- Ο άλλος μαθητής μπορεί να πει: παίρνω την $y = x$ και προσθέτω τον αριθμό 3 στον x, άρα σύμφωνα με την 2^η μεταβολή θα σπρώξω την $y = x$ προς τα αριστερά κατά 3 μονάδες (**πράσινα βέλη** στο παρακάτω σχήμα).

Όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα, με όποιον τρόπο και αν σκεφθούμε καταλήγουμε στο ίδιο σχήμα.



3. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν μπροστά από τον τύπο της συνάρτησης βάλουμε το μείον (δηλαδή αν φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = -f(x)$), τότε η νέα γραφική παράσταση C_{-f} θα είναι συμμετρική της αρχικής γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα $x'x$.

Δηλαδή για να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση της C_{-f} αρκεί να περιστρέψουμε τον άξονα $x'x$. Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την C_{-f} με το **κόκκινο χρώμα**.



Παρατηρήστε ότι C_{-f} είναι απολύτως συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.

Σε αυτή τη μεταβολή είναι πολύ σημαντικό να προσέξουμε ότι την εφαρμόζουμε όταν βάζουμε μείον **μπροστά από όλον τον τύπο της $f(x)$, όχι απλά μπροστά από τον πρώτο της όρο**.

Δηλαδή, αν για παράδειγμα μου δώσουν τη συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$, τότε η $-f(x)$ **δεν σημαίνει**

$-f(x) = -2x - 3$. $-f(x)$ σημαίνει ότι βάζω το μείον μπροστά από όλον τον τύπο, δηλαδή:

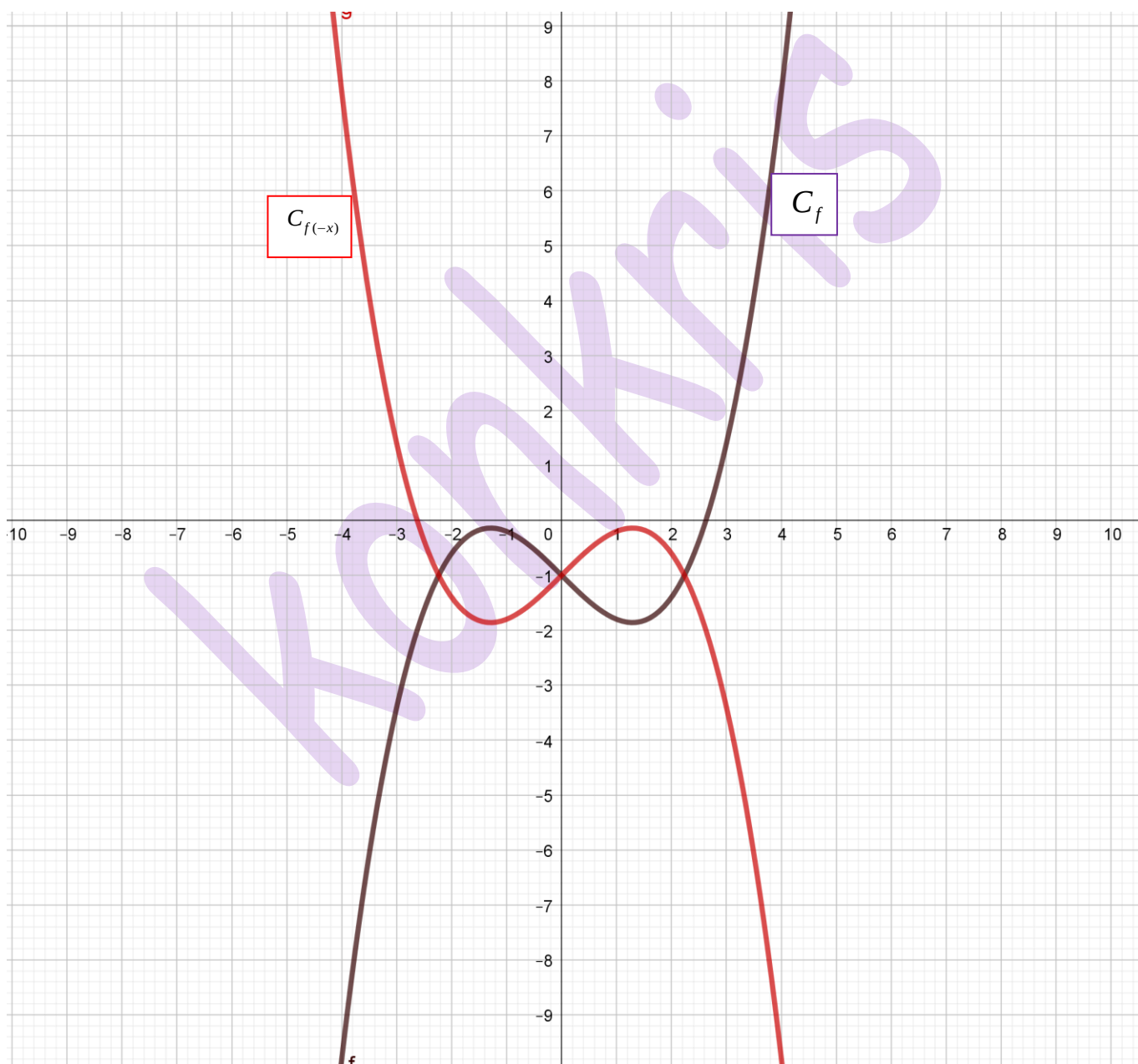
$$-f(x) = -(2x - 3) = -2x + 3.$$

Ομοίως, αν μας δώσουν τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 2x - 6$, τότε η $-f(x)$ θα είναι η:

$$-f(x) = -(2x^2 - 2x - 6) = -2x^2 + 2x + 6$$

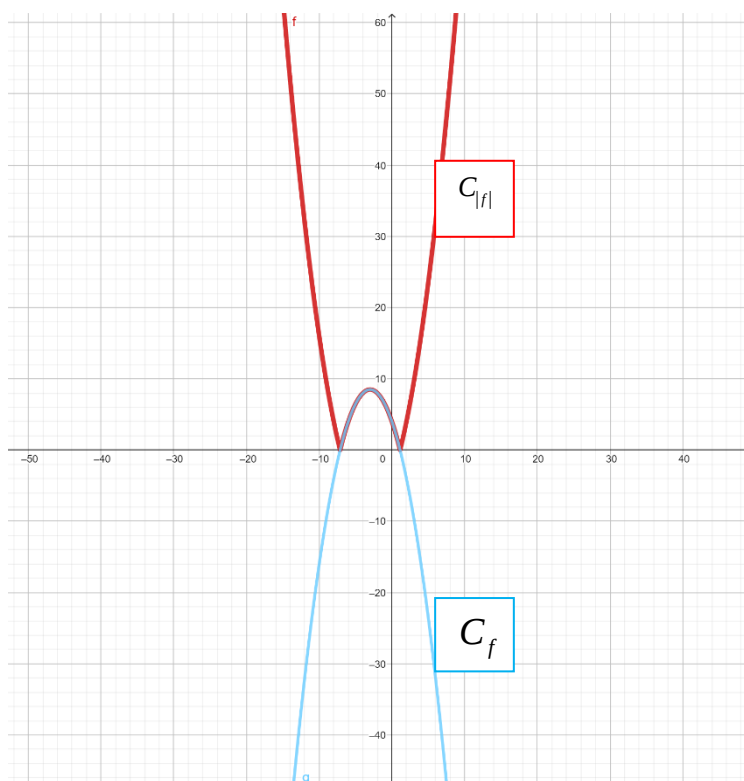
4. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν μπροστά από το x της συνάρτησης βάλουμε το μείον (δηλαδή αν φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = f(-x)$), τότε η νέα γραφική παράσταση $C_{f(-x)}$ θα είναι συμμετρική της αρχικής γραφικής παράστασης ως προς τον άξονα y .

Δηλαδή για να φτιάξουμε τη γραφική παράσταση της $C_{f(-x)}$ αρκεί να περιστρέψουμε τον άξονα y . Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Δείτε την $C_{f(-x)}$ με το **κόκκινο χρώμα**.



5. Έστω συνάρτηση με τύπο $y = f(x)$ και γραφική παράσταση C_f . Αν βάλουμε τη συνάρτηση σε απόλυτη τιμή (δηλαδή αν φτιάξουμε τη συνάρτηση $y = |f(x)|$), τότε η νέα γραφική παράσταση $C_{|f|}$ θα κρατάει απείραχτα τα κομμάτια της C_f που είναι θετικά (δηλαδή ότι βρίσκεται πάνω από την άξονα $x'x$) και αντιστρέφει όσα κομμάτια της C_f είναι αρνητικά (δηλαδή ότι βρίσκεται κάτω από την άξονα $x'x$).

Για παράδειγμα έστω μια τυχαία συνάρτηση με γραφική παράσταση C_f όπως φαίνεται στο παρακάτω



σχήμα. Η μπλε καμπύλη παριστάνει τη C_f , ενώ η κόκκινη καμπύλη είναι η $C_{|f|}$.

Άρα, συνοψίζοντας έχουμε:

1. Η $y = f(x) + c$ προκύπτει από την C_f που την πάω πάνω ή κάτω τόσο όσο λέει ο αριθμός c .
2. Η $y = f(x + c)$ προκύπτει από την C_f που την πάω δεξιά ή αριστερά κατά c **αλλά με ανάποδο πρόσημο**.
3. Η $y = -f(x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $x'x$.
4. Η $y = f(-x)$ είναι συμμετρική της C_f ως προς τον άξονα $y'y$.
5. Η $y = |f(x)|$ κρατάει τα θετικά κομμάτια της C_f ίδια και γυρίζει πάνω τα αρνητικά.

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα με αυτές τις μετατοπίσεις

Ασκήσεις

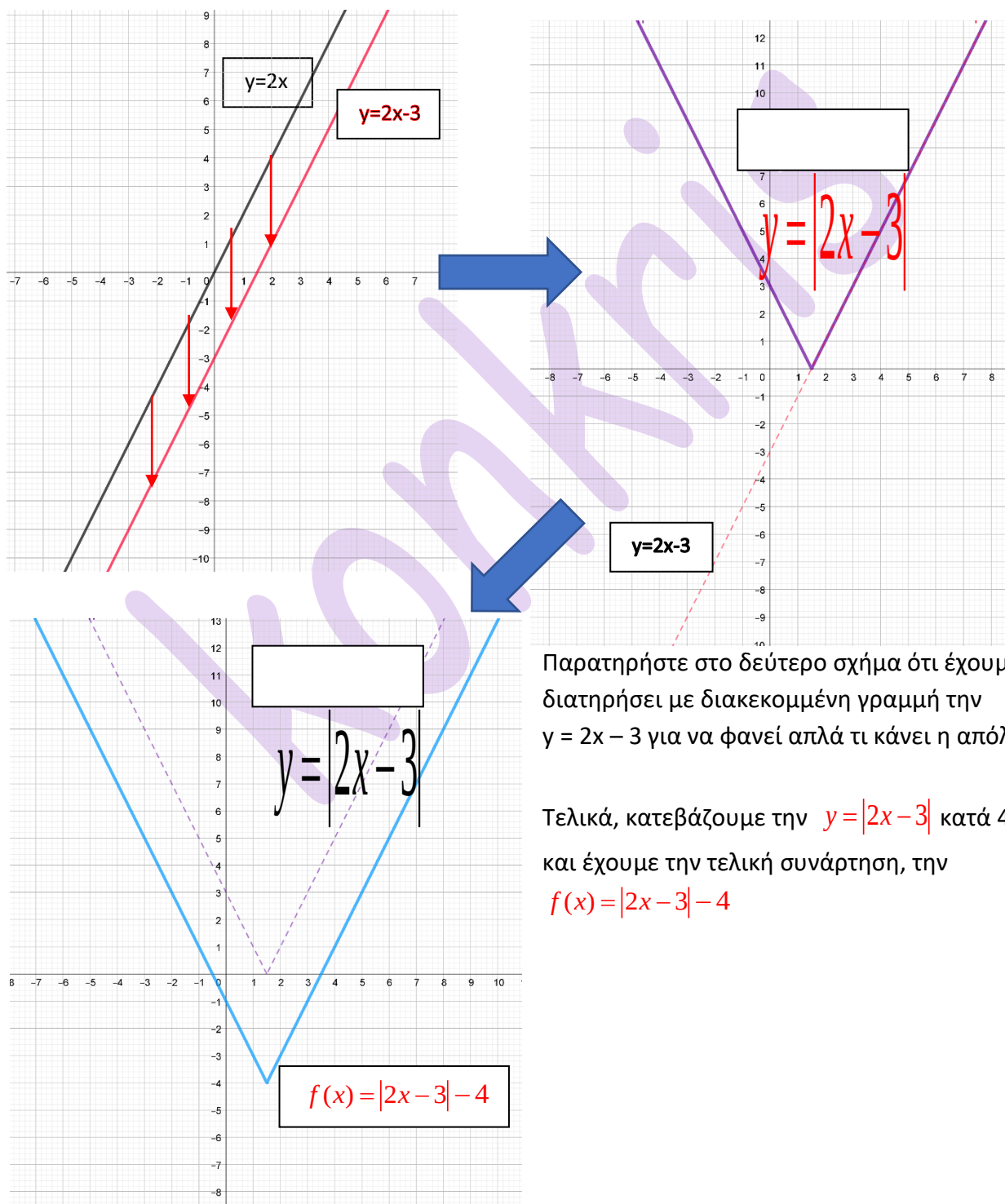
1. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = |2x - 3| - 4$

Λύση

Ξεκινάω από την $f(x) = 2x$, στη συνέχεια τη 'σπρώχνω' προς τα κάτω κατά 3 και φτιάχνω την

$f(x) = 2x - 3$, μετά βάζω απόλυτο και παίρνω την $f(x) = |2x - 3|$ και στο τέλος την κατεβάζω κατά 4 μονάδες. Άρα:

Ξεκινάω φτιάχνοντας την $f(x) = 2x$ (είναι σαν την $y = x$ αλλά πιο 'όρθια')



Παρατηρήστε στο δεύτερο σχήμα ότι έχουμε διατηρήσει με διακεκομμένη γραμμή την $y = 2x - 3$ για να φανεί απλά τι κάνει η απόλυτη τιμή.

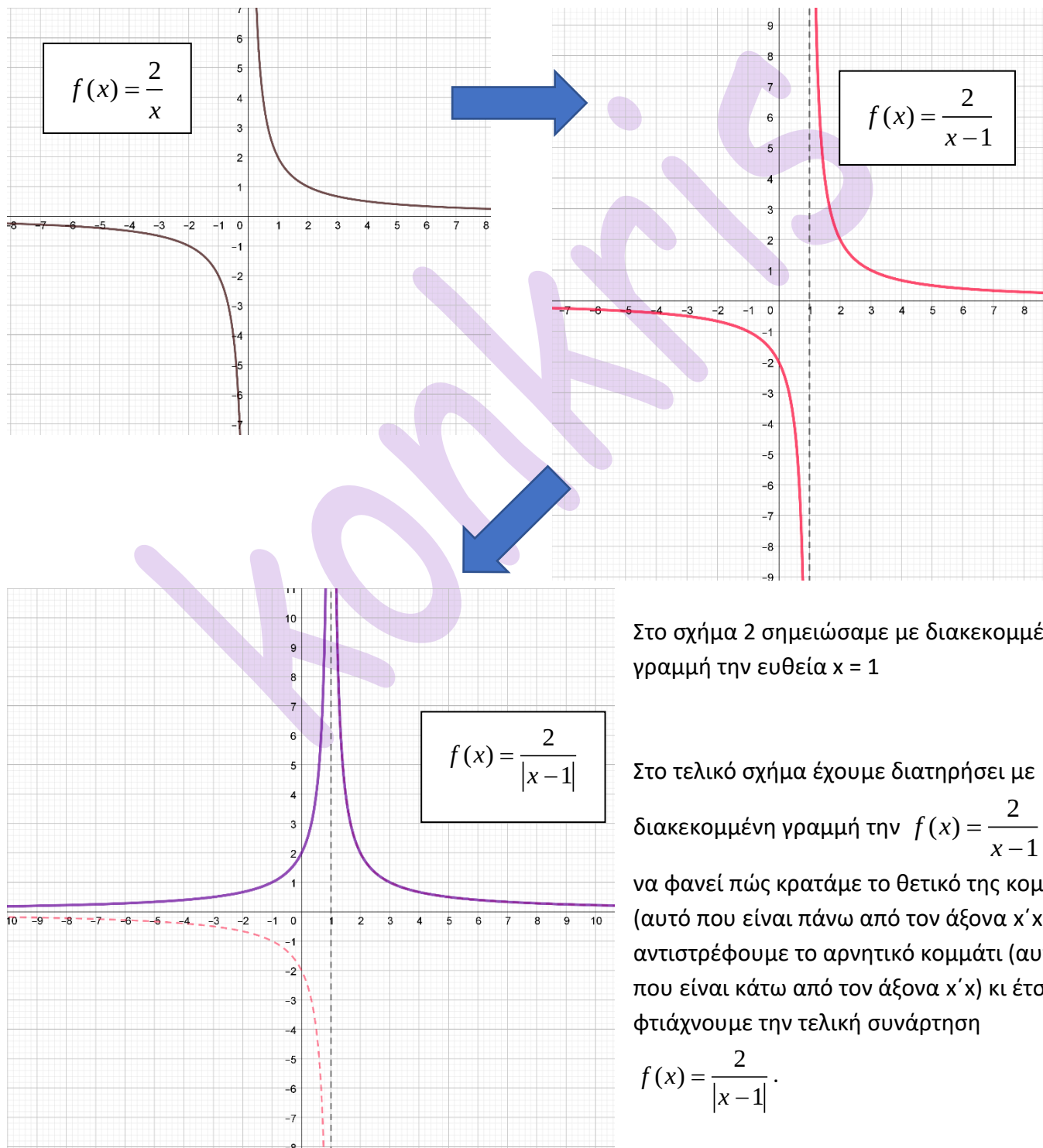
Τελικά, κατεβάζουμε την $y = |2x - 3|$ κατά 4 μονάδες και έχουμε την τελική συνάρτηση, την $f(x) = |2x - 3| - 4$

2. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{|x-1|}$

Λύση

Αρχικά παρατηρώ ότι λόγω της ιδιότητας των απολύτων έχω ότι: $f(x) = \frac{2}{|x-1|} = \left| \frac{2}{x-1} \right|$

Άρα ξεκινάω με την υπερβολή $f(x) = \frac{2}{x}$, στη συνέχεια τη 'σπρώχνω' προς τα δεξιά κατά 1, και στο τέλος της βάζω απόλυτο. Άρα:



Στο σχήμα 2 σημειώσαμε με διακεκομμένη γραμμή την ευθεία $x = 1$

Στο τελικό σχήμα έχουμε διατηρήσει με διακεκομμένη γραμμή την $f(x) = \frac{2}{x-1}$ για να φανεί πώς κρατάμε το θετικό της κομμάτι (αυτό που είναι πάνω από τον άξονα $x'x$) και αντιστρέφουμε το αρνητικό κομμάτι (αυτό που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$) κι έτσι φτιάχνουμε την τελική συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2}{|x-1|}.$$

3. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{|x+2|} + 2$

Λύση

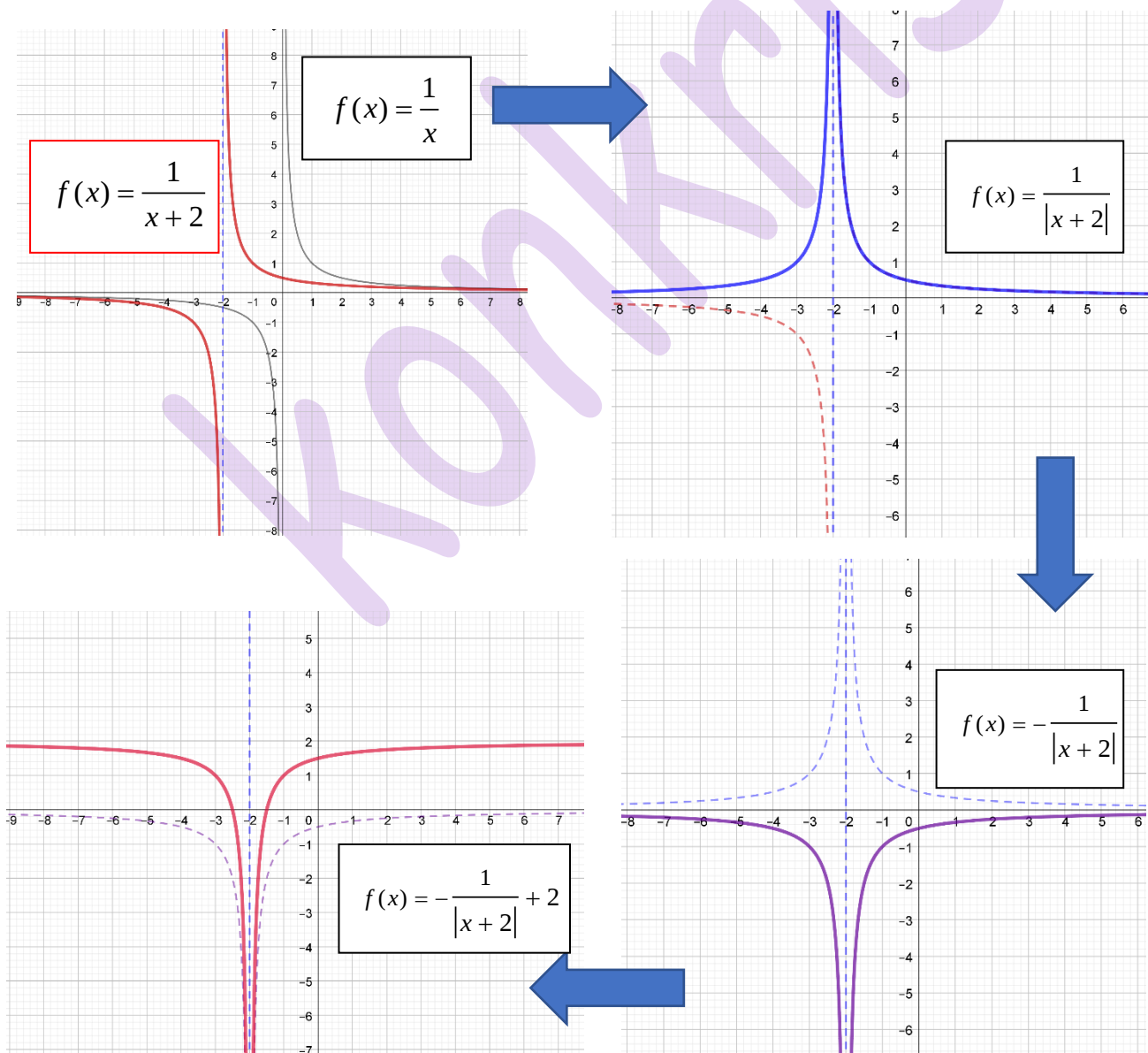
Τώρα ξεκινάμε με την υπερβολή $f(x) = \frac{1}{x}$, στη συνέχεια τη 'σπρώχνουμε' προς τα αριστερά κατά 2

μονάδες και φτιάχνουμε την $f(x) = \frac{1}{x+2}$, μετά της βάζουμε απόλυτο και φτιάχνουμε την

$f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ (θυμηθείτε από τα απόλυτα ότι $\frac{1}{|x+2|} = \left| \frac{1}{x+2} \right|$), στην συνέχεια την 'αναποδογυρίζουμε'

ως προς τον άξονα $x'x$ και φτιάχνουμε την $f(x) = -\frac{1}{|x+2|}$, και στο τέλος την ανεβάζουμε κατά 2

μονάδες και φτιάχνουμε την τελική συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{|x+2|} + 2$. Άρα:



4. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \left| \frac{3x+1}{x} \right|$

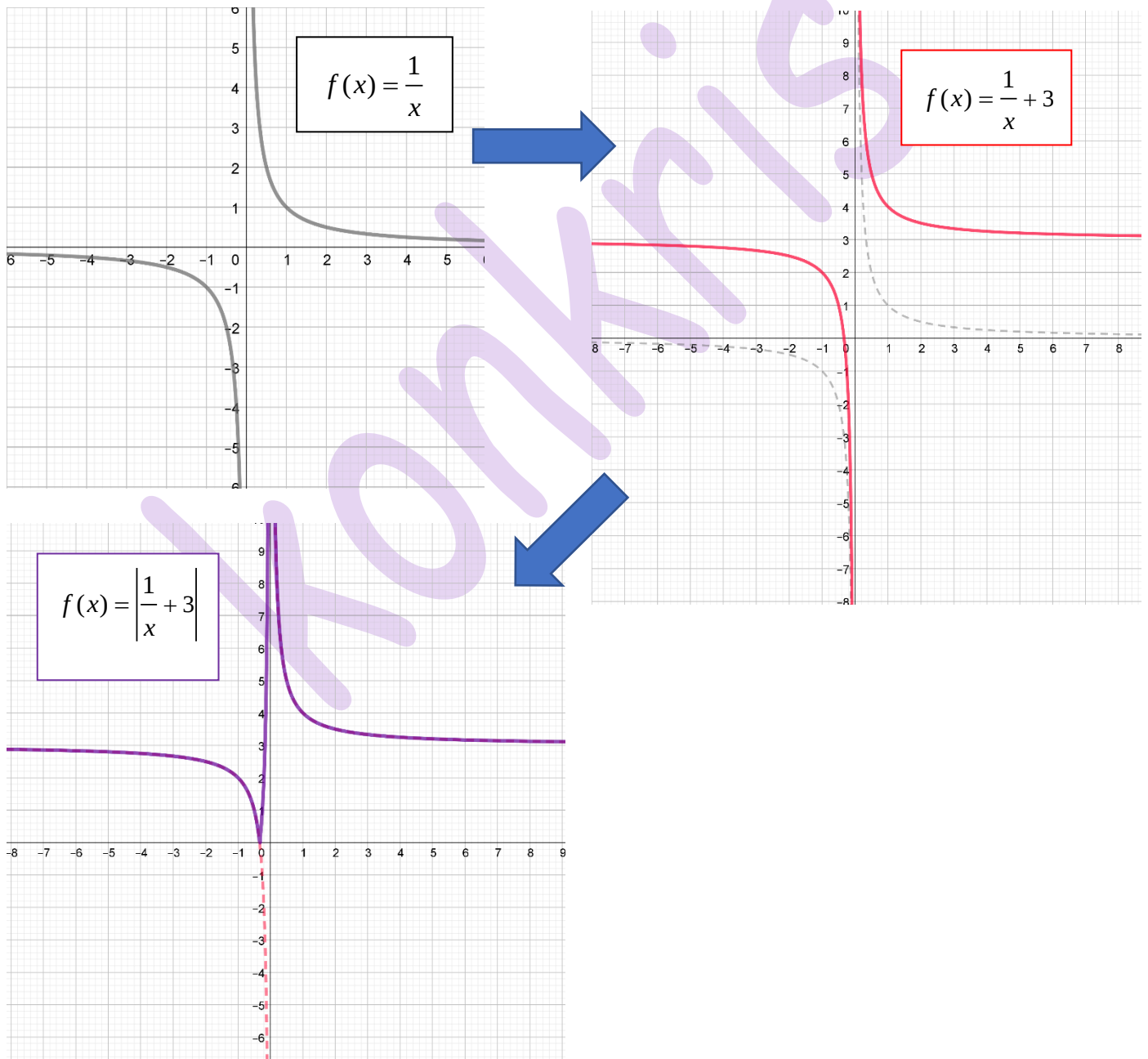
Λύση

Εδώ αρχικά μπορεί να μπερδευτούμε γιατί δεν φαίνεται να κρύβεται καμιά από τις γνωστές μας συναρτήσεις, αλλά με λίγες πράξεις αποκαλύπτεται.

$\left| \frac{3x+1}{x} \right| = \left| \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} \right| = \left| 3 + \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x} + 3 \right|$, άρα $f(x) = \left| \frac{1}{x} + 3 \right|$. Οπότε ξεκινάω με την υπερβολή $f(x) = \frac{1}{x}$, την

ανεβάζω κατά 3 και πάω στην $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ και μετά της βάζω απόλυτο και καταλήγω στην $f(x) = \left| \frac{1}{x} + 3 \right|$

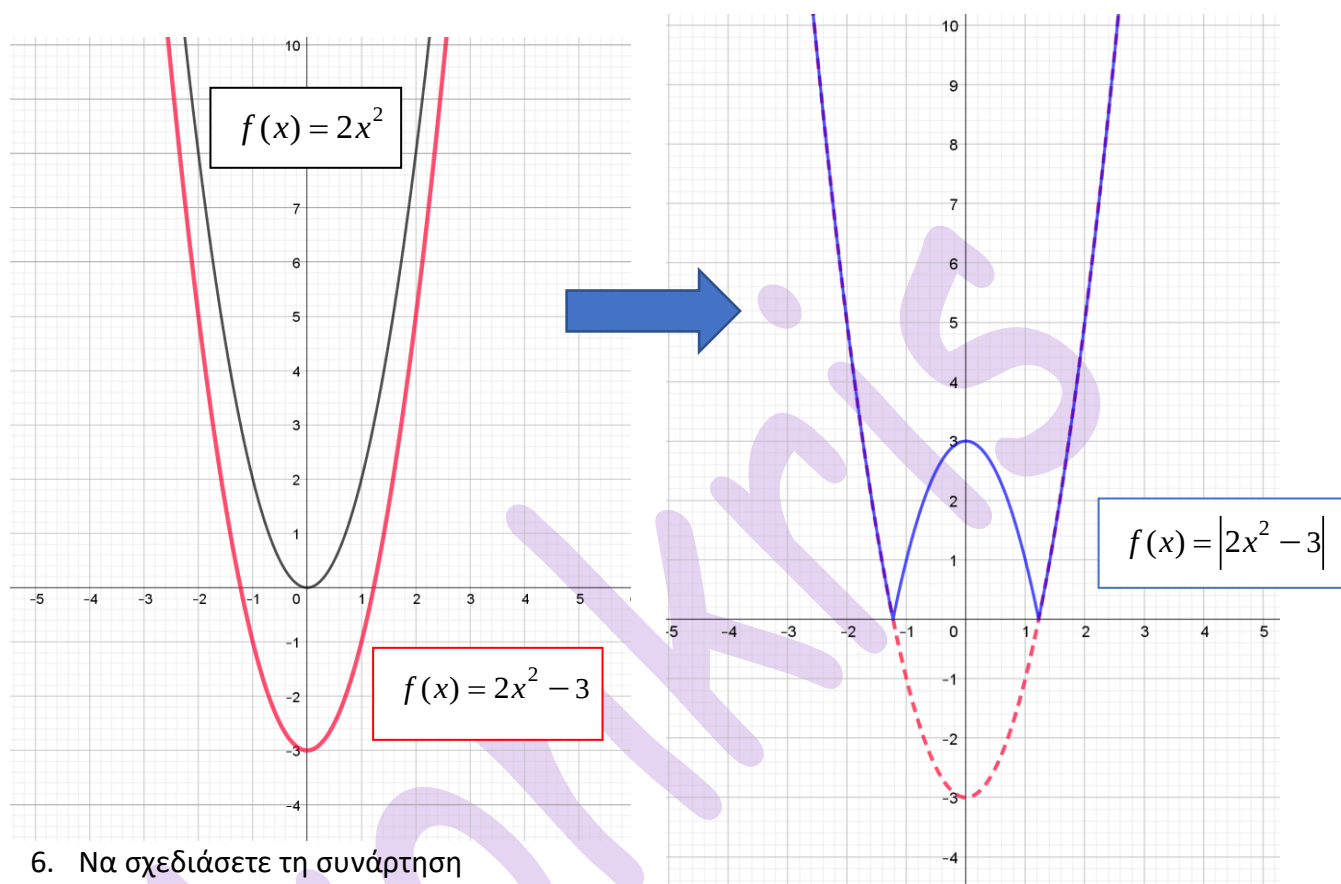
που όπως είπαμε είναι η $f(x) = \left| \frac{3x+1}{x} \right|$. Άρα έχουμε:



5. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = |2x^2 - 3|$

Λύση

Τώρα ξεκινάμε με την $f(x) = 2x^2$ που είναι παραβολή με κορυφή στο 0 και το άνοιγμα προς τα πάνω. Στη συνέχεια τη σπρώχνουμε προς τα κάτω και παίρνουμε την $f(x) = 2x^2 - 3$ και στο τέλος της βάζουμε απόλυτο. Άρα:



6. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση

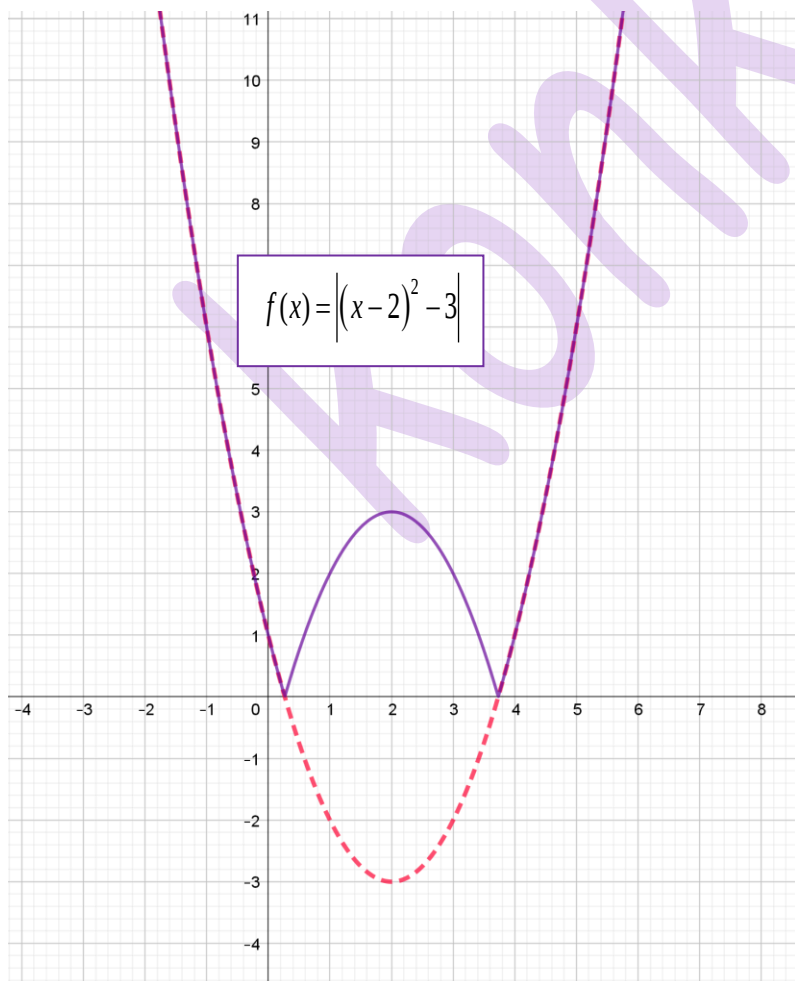
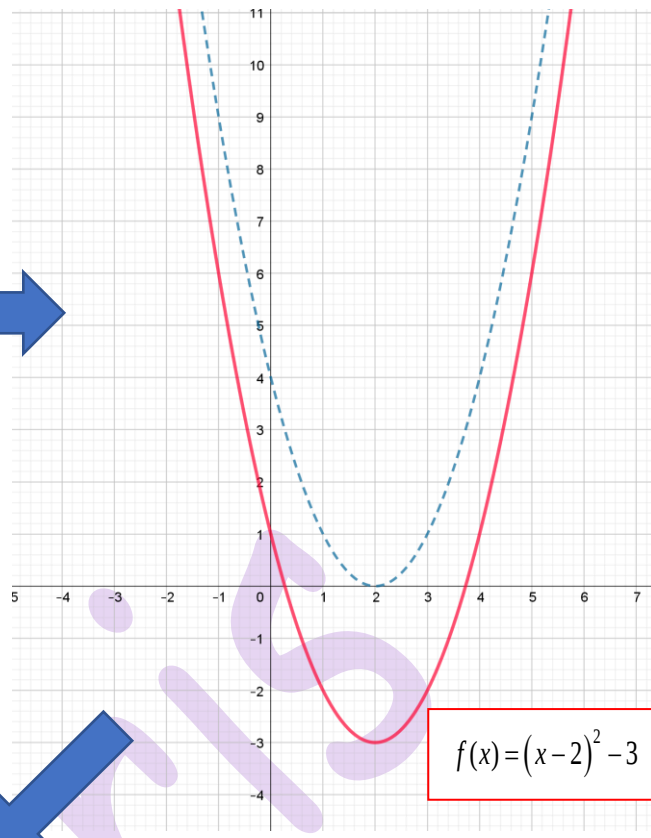
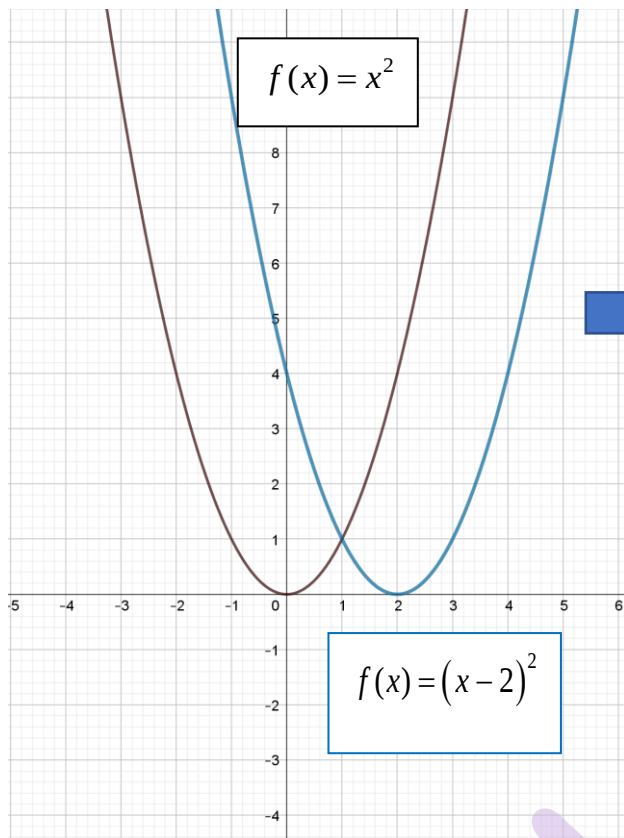
$$f(x) = |x^2 - 4x + 1|$$

Λύση

*βλέπω
ταυτότητα*

Παρατηρούμε ότι $x^2 - 4x + 1 = x^2 - 4x + 4 - 3 = (x - 2)^2 - 3$, άρα έχουμε ότι:

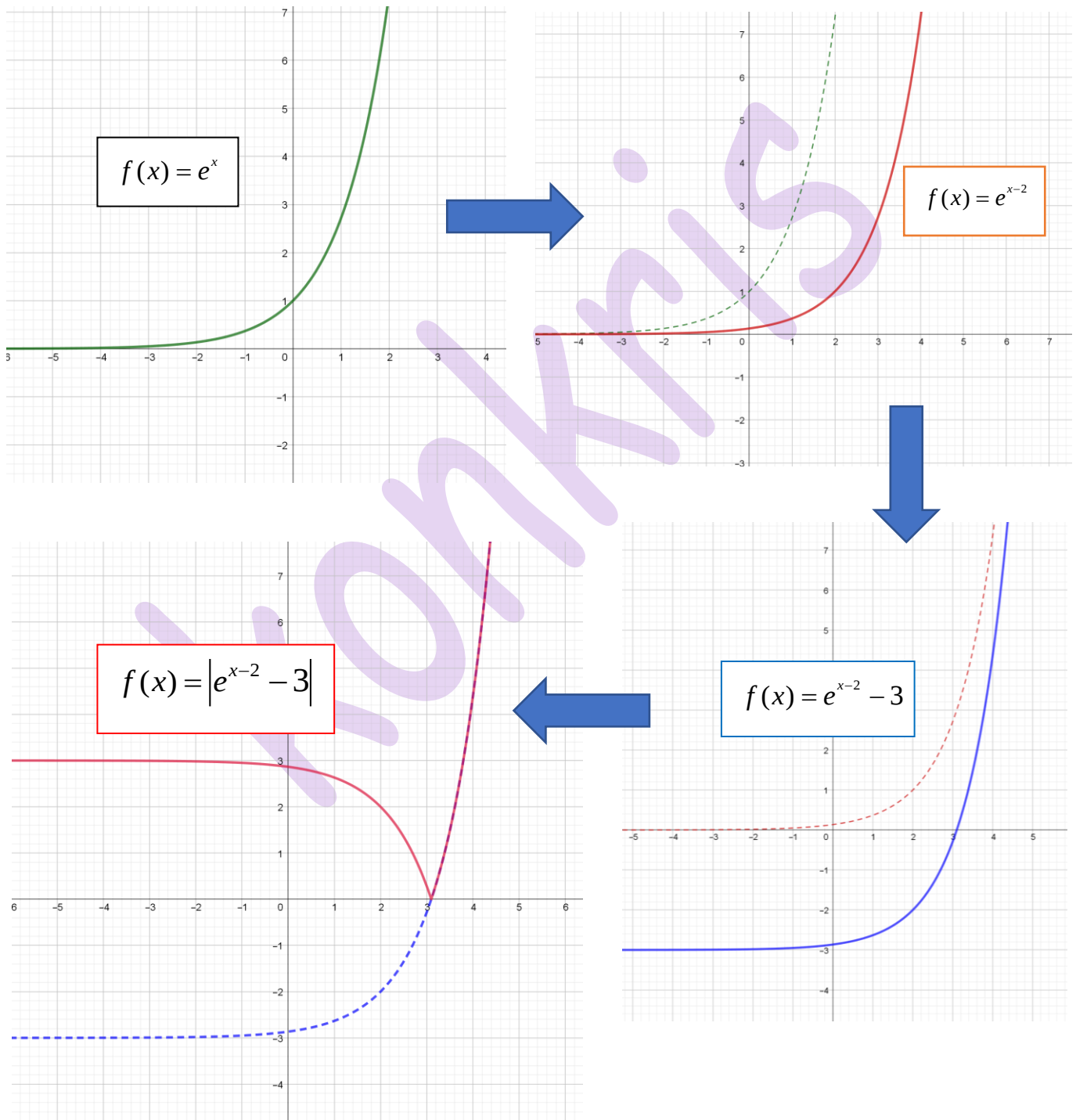
$f(x) = |x^2 - 4x + 1| = |(x - 2)^2 - 3|$. Οπότε, θα ξεκινήσουμε από την $f(x) = x^2$ (παραβολή με κορυφή στο 0 και άνοιγμα προς τα πάνω), μετά την πάμε δεξιά κατά 2, μετά θα την κατεβάσουμε κατά 3 και στο τέλος θα της βάλουμε απόλυτο. Άρα:



1. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = |e^{x-2} - 3|$

Λύση

Θα ξεκινήσουμε από την $f(x) = e^x$, θα την μετακινήσουμε προς τα αριστερά κατά δύο μονάδες και θα πάρουμε την $f(x) = e^{x-2}$, μετά θα την σπρώξουμε προς τα κάτω κατά τρεις μονάδες και θα πάρουμε την $f(x) = e^{x-2} - 3$. Στο τέλος θα φτιάξουμε την $f(x) = |e^{x-2} - 3|$ κρατώντας τα θετικά κομμάτια και αναποδογυρίζοντας τα αρνητικά.



2. Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση $f(x) = \left| \ln \frac{1}{x-2} \right|$

Λύση

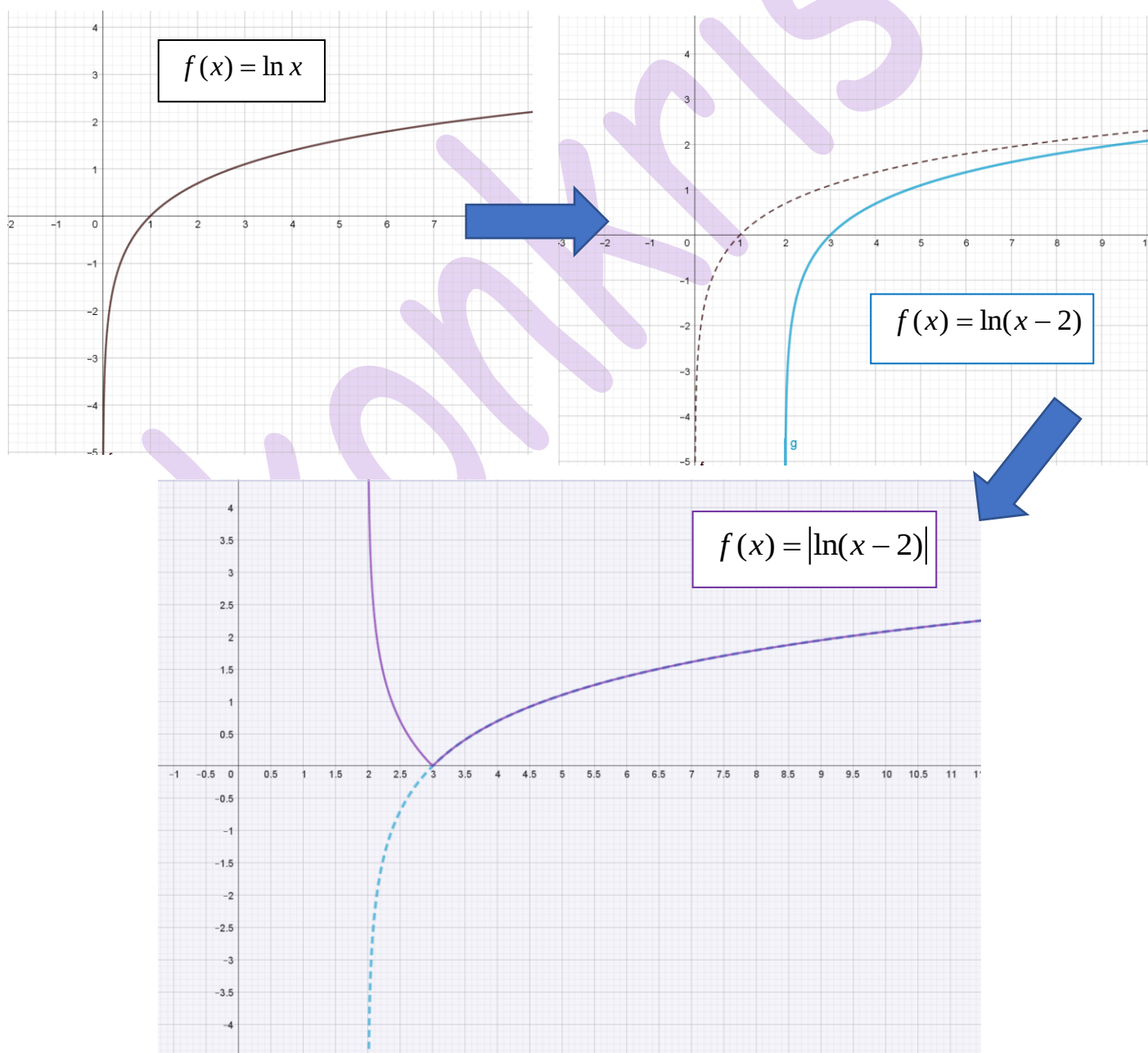
Λόγω της ιδιότητας των λογαρίθμων, ισχύει ότι $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$, άρα:

$$\ln \frac{1}{x-2} = \ln 1 - \ln(x-2) = 0 - \ln(x-2) = -\ln(x-2), \text{ οπότε:}$$

$$f(x) = \left| \ln \frac{1}{x-2} \right| = |-\ln(x-2)| = |\ln(x-2)|. \text{ Άρα θα ξεκινήσω με την } f(x) = \ln x, \text{ μετά θα την πάω προς τα}$$

δεξιά κατά 2 και θα φτιάξω την $f(x) = \ln(x-2)$. Στο τέλος θα αναποδογυρίσω ως προς τον άξονα x τα

αρνητικά της κομμάτια και θα φτιάξω την $f(x) = |\ln(x-2)| = \left| \ln \frac{1}{x-2} \right|$



Ε. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στις Γραφικές Παραστάσεις

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x < 0 \\ \sqrt{x+|\beta|}, & x \geq 0 \end{cases}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

B. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $M(-2,4)$ και $N(4,2)$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

Γ. Για $\alpha = \alpha$ και $\beta = 0$ να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

29. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f .

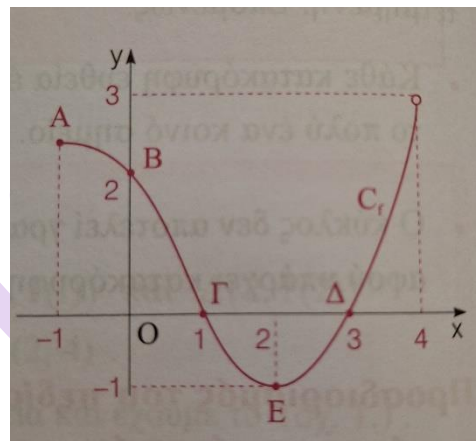
A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

B. Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(f(0))$.

Γ. Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

Δ. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

E. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln(f(x))$



30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\sqrt{x-2}-1)$. Να βρείτε:

A. το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , καθώς και τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

B. Το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Γ. Το διάστημα στο οποίο η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

31. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A και το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .

B. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

Γ. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων

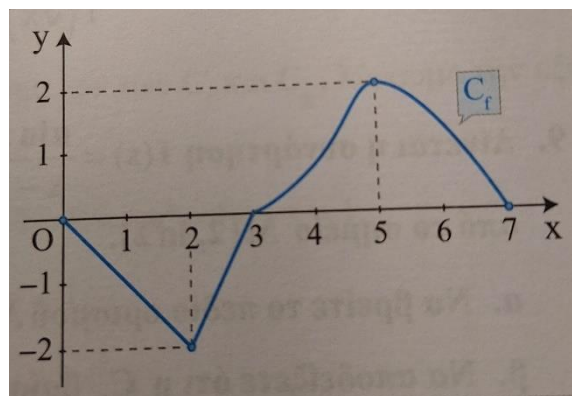
$$g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ και } h(x) = \sqrt{-f(x)}.$$

Δ. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $f(x) = 2$

ii. $f(x+2) = 2$

iii. $f(\sqrt{x}) = -2$



32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + x$ και $g(x) = x^2 + 1$. Να βρείτε:

A. Τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

Β. Το διάστημα στο οποίο η C_f βρίσκεται κάτω από τη C_g .

Γ. Το διάστημα στο οποίο η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τη C_g .

33. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 - 3x$.

Με βάση το σχήμα και με τη βοήθεια του τύπου της f να βρείτε:

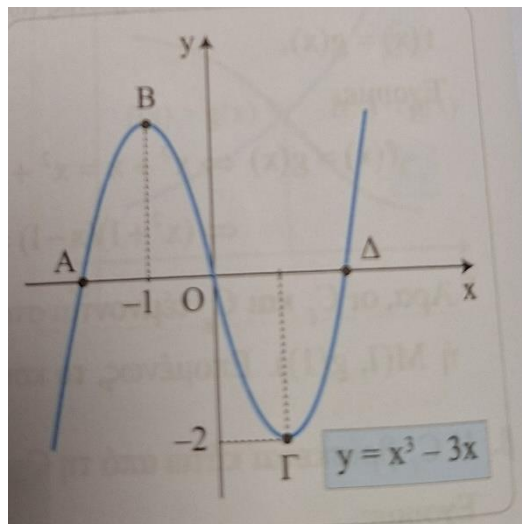
Α. τα σημεία Α, Β, Γ και Δ.

Β. τα διαστήματα στα οποία η C_f δεν βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Γ. το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$x^2 - 3 = \frac{a}{x}, \quad x > 0 \text{ για τις διάφορες τιμές της}$$

παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$.



34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 - 4x - 4a}{\sqrt{x+1}}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται

από το σημείο $M(1, 3\sqrt{2})$.

Α. Να αποδείξετε ότι $a = -3$.

Β. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

35. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι παρακάτω συναρτήσεις:

Α. $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

Β. $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x^2 - 4}$

Γ. $f(x) = x^3 + 2^{-x}$

Δ. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

Ε. $f(x) = \ln(1 - x^2)$

ΣΤ. $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x - 2}$

Ζ. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Η. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

Θ. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$

36. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

Α. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

Β. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ -\sin x, & x \geq 0 \end{cases}$

Από την κάθε γραφική παράσταση να βρείτε και το σύνολο τιμών της αντίστοιχης συνάρτησης.

37. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x$ και $g(x) = 2x - 3$. Να βρείτε:

Α. Τα σημεία τομής των C_f και C_g .

Β. Τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g και κάτω από την ευθεία $y = 8$.

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha + \beta x^2, & x < 2 \\ \beta x^2 + (\alpha - 3)x, & x \geq 2 \end{cases}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(-4, -7)$ και $B(3, 9)$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Β. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 9$ και $\beta = -1$.

Γ. Να υπολογίσετε την τιμή $f(f(7))$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 5$.

Ε. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ax + a - 4$, $a \in \mathbb{R}$. Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $M(-3, 5)$, να βρείτε:

Α. τον αριθμό a ,

Β. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ. τα σημεία τομής της C_f με τη γραφική παράσταση της $g(x) = -4x + 1$.

Δ. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της

$$h(x) = \frac{2x^2 - |x - 3|}{2}.$$

40. Δίνεται η περιττή συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

Α. τον αριθμό a ,

Β. τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Γ. τα σημεία τομής της C_f με τη γραφική παράσταση της $g(x) = -4x^2 - 3x + 4$

41. Για τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2, & x \leq 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{|x|}, & |x| > 1 \\ 2x^2, & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Α. Να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση.

Β. Με τη βοήθεια της γραφικής τους παράστασης να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

Γ. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{ax - 4}{x - 3}$ και τα σημεία της Α και Β με τετμημένες 2 και 8 αντίστοιχα.

Η ευθεία ΑΒ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$.

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

Β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται δεν βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 5x - 12$.

Γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η C_f και η γραφική παράσταση της $h(x) = \frac{-x + \lambda}{5}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

Δ. Αν το σημείο Μ ανήκει στη C_f , να αποδείξετε ότι και το συμμετρικό σημείο του Μ ως προς τη διχοτόμο της πρώτης και τρίτης γωνίας των αξόνων ανήκει στη C_f .

43. Στο σχήμα που φαίνεται δίπλα φαίνεται γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

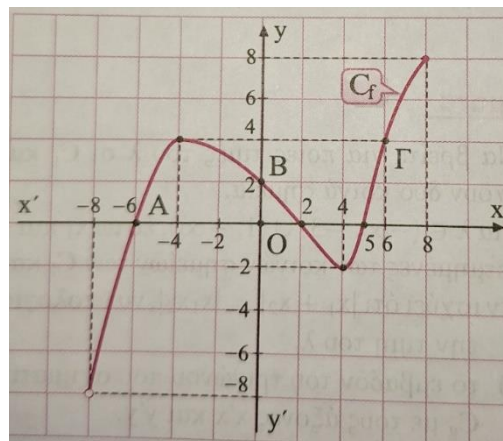
A. Να βρείτε από το σχήμα το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

B. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ που διέρχεται από τα σημεία A και B και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι αυτή διέρχεται και από το σημείο Γ.

Δ. Να λύσετε γραφικά τις ανισώσεις:

$$\text{i. } f(x) \geq \frac{1}{3}x + 2 \quad \text{ii. } -6 < 3f(x) - 6 < x$$



44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 + 4$.

A. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η κορυφή της C_f ανήκει σε ευθεία ϵ , της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

B. Να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ η απόσταση της κορυφής της C_f από την αρχή των αξόνων γίνεται ελάχιστη.

Γ. Έστω $\lambda = -1$ και g η συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της C_f κατά 2 μονάδες προς τα κάτω και 1 μονάδα προς τα δεξιά.

i. Να βρείτε τον τύπο της g

ii. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $h(x) = |g(x)|$.

ΣΤ. Ισότητα – Πράξεις – Σύνθεση Συναρτήσεων

45. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 4}$ και $g(x) = \frac{|x|}{|x| - 2}$

B. $f(x) = \sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+4}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

Γ. $f(x) = x - \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln \frac{e^x}{e^x - 1}$

Δ. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ και $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Ε. $f(x) = \frac{x^2 - x}{x}$ και $g(x) = x - 1$

ΣΤ. $f(x) = 2\ln|x|$ και $g(x) = \ln x^2$

Ζ. $f(x) = e^{\ln x}$ και $g(x) = x$

Η. $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ και $g(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$

Θ. $f, g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^9 - x^6$ και $g(x) = x^{2021} - x^{2020}$.

46. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x-2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x-2}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

$f + g, f - g, f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

47. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{x-1}{x-2}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις

$f + g, f - g, \frac{1}{g}$ και $\frac{f}{g}$.

48. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{2-x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις

$f + g, f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

49. Να βρείτε τη συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = 2x$. Να γράψετε στην απλοποιημένη τους μορφή τις παρακάτω παραστάσεις:

A. $A(x) = \frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0}$

B. $B(x) = \frac{(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(2)}{x - 2}$

51. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$ όταν:

$$f(x) = \begin{cases} x-3, & -1 \leq x \leq 1 \\ 5-3x, & 1 < x < 3 \\ 2x+1, & x \geq 3 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} x+2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

52. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ και $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Να βρείτε τις παρακάτω συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$.

53. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις: $f \circ g$, $g \circ f$ και $f \circ f$.

54. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$ και $g \circ \frac{1}{f}$.

55. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f \circ g$, $g \circ f$ και $f \circ f$.

56. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ όταν:

A. $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x}$

B. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \sqrt{1-x}$

Γ. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g(x) = \ln x$

Δ. $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$

Ε. $f(x) = \frac{2}{x}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$

ΣΤ. $f(x) = x^2 + 2x - 6$ και $g(x) = \sqrt{2-x}$

Ζ. $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$

57. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x-3, & 0 < x < 3 \\ 4-x, & 3 \leq x \leq 6 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} x-2, & 1 \leq x \leq 4 \\ 5-x, & 4 < x < 8 \end{cases}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{3-2x}{x+1}$ και συνάρτηση $f: \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = 2x - 1$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

59. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 10$ και $f(x) = 3x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$.

60. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(\ln x) = 3x + 2 \ln x - 1$, για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

61. Έστω f, g δύο συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει $(g \circ f)(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τη συνάρτηση g , αν $f(x) = e^x - 1$

B. Να βρείτε τη συνάρτηση f , αν $g(x) = 3x - 2$

62. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν $f(g(x)) = x^3 + 3x^2 - 6x + 9$ και $f(x) = 3x - 6$. Να βρείτε την συνάρτηση g .

63. Να βρείτε μια συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει:

A. $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = x + 2$.

B. $(g \circ f)(x) = |\eta\mu x|, x \in \mathbb{R}$ αν $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

64. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x + 2$

A. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

B. να λύσετε την εξίσωση $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$

65. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x$ και $g(x) = \sqrt{x}$

A. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.

B. Να λύσετε την ανίσωση $(g \circ f)(x) > 2$.

66. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$

A. να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

B. να εξετάσετε αν έχει λύσεις η εξίσωση $(f \circ g)(x) + (g \circ f)(x) = 0$

67. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + a$ και $g(x) = x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.

68. Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

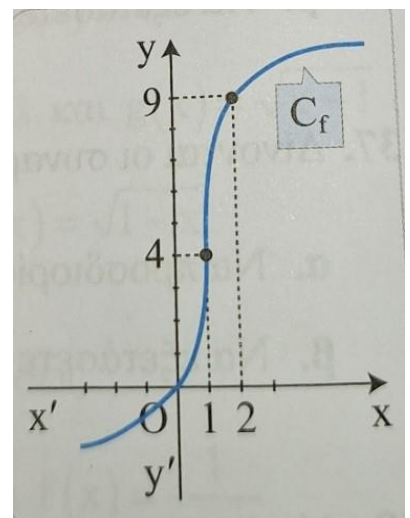
Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση g με $g(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\sqrt{x}}$.

Να βρείτε:

A. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g \circ f$.

B. Τις τιμές των α και β αν είναι γνωστό ότι:

$$(g \circ f)(1) = 1 \text{ και } (g \circ f)(2) = 4$$



69. Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων, όταν:

A. $f(x) = \eta\mu 3x$ B. $f(x) = e^{-x}$ Γ. $f(x) = \ln(1 + e^x)$ Δ. $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

70. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x-2) - 2f(4-x) = -x^2 + 12x - 26$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) - 2f(2-x) = -x^2 + 8x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Να βρείτε τον τύπο της f .

71. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x-6) - 2f(2-x) = -x^2 + \alpha x + 16 - 4\alpha \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να υπολογίσετε την τιμή $f(-2)$.

B. Έστω ότι επιπλέον ισχύει $f(-8) = 2f(4)$. Τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(x) - 2f(-x-4) = -x^2 - 10x - 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii. Να βρείτε τον τύπο της f .

iv. Να σχεδιάσετε της γραφικής παράστασης της f .

72. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$g^2(1) + g^2(3) = 2(g(1) + g(3) - 1) \text{ και } f(x^2 + 3x) + f(7x - 3) = g(x) - 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο τουλάχιστον λύσεις.

73. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) - x + 2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε το $f(0)$.

B. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

Γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < x - 2$.

Δ. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2024 = 0$ έχει μία, τουλάχιστον λύση.

74. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $f(x^2 + 2) + f(3x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο, τουλάχιστον, λύσεις.

75. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $f(f(x)) = 2x - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι $f(2x - 1) = 2f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

B. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα.

76. Να βρείτε συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $(g \circ f)(x) = |\varepsilon \phi x|$, αν $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

77. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

78. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και, $f^2(x) = 1 + 2x \cdot f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

79. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $3f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(x) = -8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

A. Να βρείτε τον τύπο της f .

B. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

80. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ όπου η g είναι άρτια και ισχύει:

$$2f(x) - 3f(-x) = x^5 g(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

B. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

Γ. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι περιττή.

Δ. Αν επιπλέον είναι $g(x) = 5x^2 + ax + 10 - a$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε τον τύπο της f .

81. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad (f(x) - 1)(f(x) + 1) = x^2 + 2x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να βρείτε τον τύπο της f .

B. Να σχεδιάσετε τη C_f .

82. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

$$f(x) > -x \quad \text{και} \quad f^2(x) + 2xf(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $f(1) = \sqrt{2} - 1$.

B. Να βρείτε τον τύπο της f .

Γ. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = \ln(f(x))$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι $g(x) + g(-x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

83. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$.

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f και g .

B. να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

Γ. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \cdot g$.

Δ. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \ln x$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g$.

84. Έστω η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x^2) = (x-1)^2$ για κάθε $x \geq 0$.

A. Να αποδείξετε ότι η g έχει τύπο $g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$, $x \geq 0$.

B. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ g$.

Γ. Για κάθε $\kappa, \lambda \in [1, +\infty)$ με $\kappa < \lambda$ να αποδείξετε ότι $g(\kappa) < g(\lambda)$.

Ζ. Μονοτονία Συναρτήσεων

85. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία:

A. $f(x) = x^3 + 2x - 3$

B. $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$

Γ. $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$

Δ. $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$

Ε. $f(x) = x^x$ στο διάστημα $(1, +\infty)$

86. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α. $f(x) = 3 - \sqrt{6 - 2x}$

β. $f(x) = \frac{4}{x^2} - \ln x$

γ. $f(x) = 1 - 3x^2 - \ln(2 - x)$

δ. $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

ε. $f(x) = \begin{cases} e^x - x^2, & x \leq -1 \\ 3 - \ln(x+1), & x > -1 \end{cases}$

στ. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^5, & x < 0 \\ 1 - \sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$

η. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$

θ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1}$

87. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Να αποδείξετε ότι:

A. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. $f(x) \cdot f(-x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

88. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και ισχύει: $f(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases}$

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $[0, +\infty)$.

β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

90. Για καθεμιά από τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2x - 3$ και $g(x) = -x^2 + 4x - 3$:

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της γραφικής παράστασης.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες x' και y' .

γ. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g .

δ. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

ε. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της καθεμιάς συνάρτησης.

91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 2 \\ \frac{8}{x}, & x > 2 \end{cases}$

α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

β. Να γράψετε τη μονοτονία της f .

γ. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .

$$92. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & x < -2 \\ x^2, & -2 \leq x \leq 1 \\ -x + 2, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

α. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

β. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .

93. Αν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f^3(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

94. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε: $f^3(x) + f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

B. Να αποδείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

95. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x - 5$

α. να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να συγκρίνετε τις τιμές $f(2019)$ και $f(2020)$.

96. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-1| - |x-3|$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να εξετάσετε αν η f είναι αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

97. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + ax^3 + a - 25$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον

άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -2 .

α. Να αποδείξετε ότι $a = -3$.

β. Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} a + \beta x^3, & x \leq 1 \\ a - 1 + \beta x, & x > 1 \end{cases}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από

τα σημεία $A(-1, 4)$ και $B(3, -1)$.

α. Να βρείτε τους αριθμούς a και β .

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

99. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + (4-8a)x + 5$, $a \neq 0$. Η κορυφή της C_f έχει τετμημένη 3 .

α. Να αποδείξετε ότι $a = 2$.

β. Να γράψετε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

γ. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f .

100. α. Να αποδείξετε ότι $x + \frac{1}{x} \geq 2$ για κάθε $x > 0$.

β. Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = \frac{e^{2x} + 3e^x + 1}{e^x}$.

101. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^3 = 1 - \ln x$.

β. $2x^5 + 3e^x = 3$

γ. $\frac{2}{x} = 1 + \ln(x-1)$

δ. $e^{3-x} - 1 = \ln(x-2)$

στ. $3^x + 4^x = 5^x$

102. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $e^{1-x} < 1 + \ln x$

β. $5x^3 + \ln x < \frac{2}{x} + 3$

γ. $9 - x^3 < e^{x-2}$

δ. $2^{2-x} > \ln(x+2) + 8$

ε. $e^x + 3x > \left(\frac{1}{2}\right)^x$

103. α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = e^x + 2x - 1$.

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: i) $g(x) = \ln f(x)$ και ii) $h(x) = \frac{1}{f(x)}$

104. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$.

105. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x - 1$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν $x > 1$, τότε $f(x) = e^x + \ln x - 1$.

ii. Αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^\beta - e^\alpha$.

iii. Για κάθε $x > 0$, $f(x+1) - f(x) > 0$.

iv. Για κάθε $x > 0$, $f(x) < f(2x)$

v. Για κάθε $x > 1$, $f(x^2) > f(x)$

106. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα και η g είναι γνησίως αύξουσα, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

107. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $f(x) > f(3)$

β. $f(2x+1) < 5$, αν $f(3) = 5$.

γ. $f(x^2 - 3x) \geq f(2 - 4x)$

δ. $f(f(3x-1)) < f(f(2x+3))$

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε τις ανισώσεις:

- i. $f(x) > 0$
 iii. $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$

ii. $e^x + x < e + 1$
 iv. $e^{f(x)} + f(x) - x > e^x$

109. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x < \frac{2}{x^4 + 1}$
 β. $x^4 - \frac{2}{x} > -1$, $x \in (0, +\infty)$

γ. $\ln^5 x + \ln x < 2$
 δ. $f(2x - 1) + 2 > x^5 + x$

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 1)$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
 β. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$

γ. Να λύσετε την ανίσωση $x^4 - x^2 < \ln \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}$

111. Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $e^x + x^3 < 1$ β) $e^x - e^{x^2} > \ln x$

112. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ και f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε τις ανισώσεις:
 α) $f(x) + e^x > 2$ β) $(x+1)f(x) < 1$ στο $(-1, +\infty)$

113. Α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^x$.

Β. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\ln \frac{x^2 + 1}{2x} > e^{2x} - e^{x^2 + 1}$ για κάθε $0 < x \neq 1$.

Γ. Να αποδείξετε ότι $\ln(\varepsilon \phi x) < e^{\sigma\nu x} - e^{\eta\mu x}$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Δ. να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x + \alpha) - f(x + \beta)$ με $\alpha > \beta$, βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.
 B. Για κάθε θετικό ακέραιο n να αποδείξετε ότι $f(5^n) + f(7^n) > f(6^n) + f(8^n)$
 Γ. Για κάθε $x > 0$ να αποδείξετε ότι $f(2x) + 1 > f(3x) + f(e^x)$
 Δ. Για κάθε $x < 0$ να αποδείξετε ότι $f(2^x) + f(4^x) < f(3^x) + f(5^x)$

115. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 0$.

α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .
 β. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

116. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία A(-1, 6) και B(2, 3).

α. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
 β. να λύσετε την ανίσωση $f(f(x^2 - 17) - 4) < 3$

117. Έστω $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$, $B(2, -3)$ και η συνάρτηση $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$.
- α. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.
 β. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
 γ. Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$.
118. Δίνεται $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, γνησίως μονότονη συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, 7)$.
- α. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .
 β. Να λύσετε την ανίσωση $f(|x| - 4) - 6 - 5 < 0$.
 γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)(f(x) - 12) < -35$.
 δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x - 1) + f(x + 3) < f(5 - x) + f(7 - x)$.
119. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + 2f(x) = 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
120. Δίνεται γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$, ισχύει ότι: $f(2\alpha\beta) + f(\gamma) > f(\gamma + 1) + f(\alpha^2 + \beta^2)$.
121. α. Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης $f(x) = 3 - \sqrt{x - 4}$.
 β. Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$.
122. Η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2 + (\lambda^2 - 2\lambda - 1)x + 3$ παρουσιάζει μέγιστο στο 1. Να βρείτε:
 α. τον αριθμό λ , β. το μέγιστο της f , γ. τα διαστήματα μονοτονίας της f .
123. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4x^2 - 4x + 5}{4x^2 + 3}$.
 Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το $\frac{2}{3}$ και μέγιστο το 2.
124. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:
 α. $f(x) = \sqrt{12 - 2x} - \sqrt{\frac{x + 2}{2}}$. β. $f(x) = |e^x - 1|$
 γ. $f(x) = (e^x - 1)^2 \cdot (x - 1)^4$ δ. $f(x) = x^2 - 2x - 5$
125. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 και η g παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση fg παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .
126. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 4 + \sqrt{x^2 + 1}$ και $g(x) = \frac{6}{\sqrt{x^2 + 4}}$
- α. Να βρείτε το ελάχιστο της f .
 β. Να βρείτε το μέγιστο της g .
 γ. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $7f(\alpha) - 5g(\beta) \geq 20$.
127. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 2$ και η ευθεία $\varepsilon : y = x - 1$. Να βρείτε την ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση της C_f και της ευθείας ε .

128. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$. Από το σημείο M της C_f φέρνουμε παράλληλες προς τους άξονες $y'y$ και $x'x$ που τέμνουν τον $x'x$ στο A και τον $y'y$ στο B. Να βρείτε τη θέση του σημείου M, για το οποίο η περίμετρος Π του ορθογωνίου OAMB γίνεται ελάχιστη, όπου O η αρχή των αξόνων.
129. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει: $f(x) \geq x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της απόστασης των σημείων A και B.
130. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1, το 2.
- α. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + (x-1)^2 = 2$.
- γ. Αν ισχύει $f(\alpha) + f(\ln \beta) = 4$, να βρείτε τις τιμές των α και β .
131. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
- α. Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης f και τη θέση που το παρουσιάζει.
- β. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^2 + 1} = \sin x$.
132. Έστω δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τη g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = f(x+1) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να λύσετε τις ανισώσεις:
- (i) $f(\ln x + 1) > f(\ln x)$ με $f(1) = f(2)$ (ii) $f(\sqrt{x} + 1) - f(x+1) < f(\sqrt{x}) - f(x)$
- β. Να αποδείξετε ότι: $f(e^x + 1) - f(\eta\mu x + 1) > f(e^x) - f(\eta\mu x)$, για κάθε $x > 0$.
133. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.
- α. Να δείξετε ότι $f(x) + f(7x) > f(3x) + f(10x)$, για κάθε $x > 0$.
- β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x^3) = f(x^2) + f(x^8)$, στο $(0, +\infty)$.
134. α. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις όπου $g \circ f$ γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- β. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + e^{f(x)} - e^{-x} - 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
135. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Η f είναι περιττή και η C_f διέρχεται από τα σημεία A(-1, -4) και B(2, 26).
- α. Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ και δ .
- β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- γ. να λύσετε την ανίσωση $(x^2 - 2)^3 - (2x + 1)^3 < \frac{-x^2 + 2x + 3}{3}$
- δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(2^{f(x)}) + f(f(x) - 20) < f(\ln(e^{-x} + 1)) + f(x - \ln(e^x + 1))$
136. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν: $f(x) + g(x) = 2e^x$ και $f(x) - g(x) = 2e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να βρείτε τους τύπους f(x) και g(x).

β. Να αποδείξετε ότι η f έχει ελάχιστο το 2.

γ. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq g(\ln 2) + \frac{f(0)}{2}$.

ε. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $2g(\alpha + \beta) = f(\alpha)g(\beta) + g(\alpha)f(\beta)$

137. Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε η g να είναι γνησίως αύξουσα και η $g \circ f$ να είναι γνησίως φθίνουσα.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 1) - f(2x + 1) < e^{x^2+1} - e^{2x+1}$.

138. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $e^{f(x)} + 3f(x) = x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε την τιμή $f(3)$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $e^{f(x^2+3)} + 2 < 4|x| - 3f(4|x|)$

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x + 2)$

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

B. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^4 + 1) > f(x^2 + 1)$.

Γ. να λύσετε την ανίσωση $x - \sqrt{x} > \ln \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2}, \quad x \in [0, +\infty)$.

140. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

A. $(x^3 + x^2)^3 - (x + 1)^3 > 2(x + 1 - x^3 - x^2)$

B. $(x - 1)^2 > \ln \frac{1 + e^{2x}}{1 + e^{x^2}} + 1$

141. Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε την ανίσωση:

$$f(x^2 + 1) - f(2) < f\left(\frac{1}{x^2 + 1}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right)$$

142. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x - x$. Να λύσετε την ανίσωση

$$f(x^2 + 1) + f(x + 2) < f(x^2) + f(x + 3)$$

143. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

η f είναι γνησίως φθίνουσα,

$$(f \circ g)(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα.

B. Να λύσετε την ανίσωση $g(2f(x^2 - 2) - f(x)) > x$

Η. Συναρτήσεις 1 – 1 – Αντίστροφες Συναρτήσεις – Επαναληπτικές ασκήσεις στις Συναρτήσεις

1. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι 1 – 1.

α. $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

β. $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

γ. $f(x) = 2x + e^x - 1$

δ. $f(x) = x^2 - 1$

ε. $f(x) = 2\ln(x+1) - 3$

στ. $f(x) = 1 - \sqrt{3-2x}$

ζ. $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 2}$

η. $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$

θ. $f(x) = x - \ln(1 - e^x)$

ι. $f(x) = e^x + x - 2$

ια. $f(x) = e^{1-x} - x^3$

ιβ. $f(x) = 2^x + \ln x$

2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^{10} - 3x^9 + e^{x^2-3x} + 2022$ δεν είναι 1 – 1.

3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^4 - x + 15$ δεν είναι 1 – 1.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x^2) + 2f(x) = x^4 + 2x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1 – 1.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} + x^3 - 2$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1 – 1.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $f(x) = 0$

ii. $f(\ln x) = 0$

iii. $f(x^2 - 2x) = f(x - 2)$

iv. $f(f(x) + 1) = 0$

γ. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \alpha^3 - \beta = 2 \\ e^{\alpha-1} + \beta = 0 \end{cases}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1 – 1.

β. Να λύσετε την εξίσωση $(1 - e^{-x})f(x^2 + 2x) = 1$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + e^x - 1$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 – 1.

B. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x) = 0$

ii. $f(x) = e$

iii. $f(x^2 - 5x + 6) = 0$

iv. $(x+3)^3 - (x^2+1)^3 = e^{x^2+1} - e^{x+3}$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x + x = e^{1-x} - (x-1)^3$

Δ. Αν είναι γνωστό επιπλέον ότι το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^\pi$ έχει ακριβώς μία λύση.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $5^x - 3 = \sqrt{5-x}$

β. $3^x + 7 = 4^x$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $(2x-3)^2 - (x+6)^2 + 2(|2x-3| - |x+6|) = \ln \frac{|x+6|+1}{|2x-3|+1}$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4, \quad x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(f(3)) - f(x^2 + 2x)) - 2 = 0$

11. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να λύσετε:

α. Την ανίσωση $f(x) - x > f(2x)$

β. Την εξίσωση $f(x) - \ln x = f(x^2)$

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$

13. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(1-x^3) = f(1) - x^5$.

14. Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^x - e^{-x}$ είναι $1-1$.

Β. Αν για τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = x - \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 0$, τότε να βρείτε

τον τύπο της συνάρτησης f .

15. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + e^{f(x)} = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(g \circ f)(x) = x^3 + e^{f(x)} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι $1-1$.

18. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, όπου η συνάρτηση $g \circ f$ είναι $1-1$. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f^3(x) - x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x) + x^2 - x) = f(f(x) + 2x - 2)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(2x+1)) - f(f(x)) = x+1$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

B. Να βρείτε την τιμή $f(-1)$.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + x - 1) + 2(x+1) = f(f(x))$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3-x}{x+1}$.

α. Να εξετάσετε αν η f είναι $1-1$.

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 1$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{2-x}{x+2}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.
- γ. Να εξετάσετε αν η f είναι $1-1$.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2-\ln x}{3}$ και $g(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 1}$.

- α. Να εξετάσετε αν η f είναι $1-1$.
- β. Να εξετάσετε αν η g είναι $1-1$.
- γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g .

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + ax^3 - 6$. Η C_f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη -1 .

- α. να αποδείξετε ότι $a = -4$.
- β. Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.
- γ. Να εξετάσετε αν η f είναι $1-1$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f^3(x) = 3x - 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(x-2)f(x-3) - (x-3)f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.
- β. Να εξετάσετε αν η f είναι $1-1$.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = \frac{1-x}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- β. Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.
- γ. Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = -x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε:

- α. Η f είναι περιττή
- β. $f(0) = 0$
- γ. Η f είναι $1-1$
- δ. Η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$
- ε. Η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $e^x = 1 - x^7$ β. $\ln(x-1) = 2 - x$ γ. $3^x = 5 - 2x$ δ. $e^x + 2 = \sqrt{8 + \sqrt{1-x}}$

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a}{x} - \ln x$ για την οποία ισχύει ότι $3f(4) - 2f(8) = 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι $a = 2$.
- β. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- γ. Να λύσετε τις εξισώσεις:
 - i . $f(|2x-3|) = 2$
 - ii . $f(|x-6|) - f(|2x-9|) = 0$
 - iii . $2 - x \ln x = 2x$

31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i . $\ln \frac{\sqrt{x}+1}{x^2+1} = x^2 - \sqrt{x}$

ii . $1 - \ln \frac{x}{3} + \frac{3e}{x} = \ln \frac{4e-x}{e} + \frac{4e-x}{e}$

32. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x^2 + x)) - f(f(8 - x)) = 2x^2 + 4x - 16$.

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) = (x - 2)f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να υπολογίσετε την τιμή $f(3)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x + 1 - f(|x| - 1)) - f(x - 2) = 0$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(x - 1) + (3 - x)f(3 - x) = 0$.

34. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x + 3e^{x-2}$ καθώς και συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(g \circ f)(x) = 8 - 3e^{x-2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1.

β. Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(|x| - 3) + e^x - 1) - f(e^x + 1) = 0$.

35. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(x) > 0$ και $(f \circ f)(x) = x^2 \cdot f(x)$ για κάθε $x > 0$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

B. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + x + 1}\right)^2 = \frac{f(x^2 + x + 1)}{f(x^2 + 2)}$

36. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ και $g(x) = \ln(1 - x)$.

A. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = g \circ f$.

B. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η C_h βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η h είναι 1-1 και στη συνέχεια ότι και η f είναι 1-1.

Δ. να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

E. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

i. $f(x^4) + f(x^2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$ ii. $f(x) = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$

37. Για τις παρακάτω συναρτήσεις να αποδείξετε ότι αντιστρέφονται και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφη:

A. $f(x) = 2x - 1$ B. $f(x) = \sqrt{x - 2}$ Γ. $f(x) = \ln(e^x + 1)$ Δ. $f(x) = 3e^{x-2} - 1$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + 3) - \ln(x - 1)$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

39. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

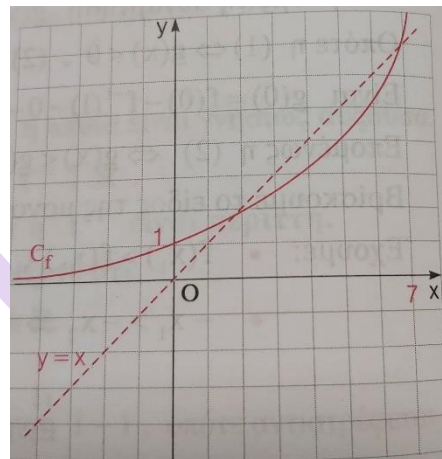
40. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μια συνάρτησης f που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε γραφικά ότι η f έχει αντίστροφη και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} και το σύνολο τιμών της.

β. Να βρείτε τις τιμές:

i. $f^{-1}(7)$ ii. $(f \circ f^{-1})(e)$ iii. $f^{-1}(1)$

γ. Να σχεδιάσετε την $C_{f^{-1}}$.



41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+4}{x+1}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία που είναι άξονας συμμετρίας τους.

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4-x} - 3$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} .

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(x - 2)$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = 3$.

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x+a}{x+1}$, όπου $a \in \mathbb{R} - \{3\}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β. Αν ισχύει $(f \circ f)(-2) = 1$, να βρείτε:

i. τον αριθμό a ,

ii. Τη συνάρτηση f^{-1} .

46. Έστω $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x) = (x-1)^2 + 2$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε την συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να σχεδιάσετε τις C_f και $C_{f^{-1}}$ στο ίδιο σύστημα αξόνων.

δ. Για κάθε $x \geq 1$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(f(x), x)$ των C_f και $C_{f^{-1}}$ αντίστοιχα.

Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση d των σημείων A και B .

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

48. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 6x + 7$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β. Να ορίσετε την f^{-1} .

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

B. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

Γ. να βρείτε την αντίστροφή της f , αν είναι γνωστό ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{|x|}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ x^2+3, & x \geq 0 \end{cases}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να ορίσετε την f^{-1} .

53. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση $f^3(x) + 3f(x) + x - 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β. Να ορίσετε την f^{-1} .

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x + 14$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = x$.

55. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x - 16$.

A. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y = x$.

56. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία είναι γνωστό ότι: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f^3(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Να βρείτε την f^{-1} .

Γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y = x$.

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3e^{2-x} - x + 1$.

A. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Αν είναι γνωστό ότι $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, τότε να λύσετε:

i. την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ ii. την ανίσωση $f^{-1}(e^x + 1) > 2$ iii. την εξίσωση $f^{-1}(x + 2) = x + 2$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f^{-1}(x^2 + x)) = f^{-1}(f^{-1}(2))$

58. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(\mathbb{R}) = (0, +\infty) \text{ και } \frac{1}{f(x)} - \ln f(x) = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

B. Να αιτιολογήσετε τον λόγο για τον οποίο η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Γ. Να βρείτε την τιμή $f(1)$ και στη συνέχεια να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

$$\text{i. } f^{-1}(x^2 - x + 1) < 1 \quad \text{ii. } f(x) - \ln \frac{1}{f(x)} < 1$$

59. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία είναι γνωστό ότι: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f^3(x) + f(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και ότι αντιστρέφεται.

B. Να βρείτε το διάστημα όπου η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$.

60. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x + x - 1$.

A. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

B. Αν είναι γνωστό ότι $f(0, +\infty) = \mathbb{R}$, τότε να βρείτε το διάστημα όπου η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$.

61. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x - 3) + x - 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β. Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.

63. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$. Επίσης η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(3, 4)$ και $B(6, -2)$.
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f και να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(-3 + f^{-1}(|x| - 5)) = 4$.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(f(x^2 + 2) + 6) < 3$.
64. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1$, $f(1) = -2$.
- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1} .
 - Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(3x + 4) - f^{-1}(-2)) = 1$
 - Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(3 + f(\ln x)) > 0$.
65. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{10}{\sqrt{x}} + e^{4-x}$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
 - Αν γνωρίζετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$, να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x + 5) > x + 3$.
66. Δίνεται γνησίως αύξουσα συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και σύνολο τιμών το $(0, 6)$, για την οποία ισχύει $f(1) = 3$. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(4 - x) < f^2(x) - 8$.
67. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και f^{-1} γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
 - Αν η f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι και η f^{-1} είναι περιττή.
 - Αν ισχύει $f(x) > x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f^{-1}(x) < x$.
68. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα και $f(0) = 1$.
- Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
 - Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - f^{-1}(1 - x) < x + 1$.
69. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x-2}$ και $g(x) = \frac{x}{x+1}$
- Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
 - Να αποδείξετε ότι η $f \circ g$ είναι $1-1$.
 - Να ορίστε την αντίστροφη της $f \circ g$.
70. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) + f(x) = 12x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 8$.
- Να υπολογίσετε την τιμή $f(8)$.
 - Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
 - Να υπολογίσετε την τιμή $f^{-1}(3)$
 - Αν η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $f\left(f^{-1}(x^2 - 4x + 26) - \frac{20}{3}\right) = 3$

ii. $f^{-1}(12x - 29 - f(x - 2)) = f(4 - x)$

ε. Αν υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε: $e^{f(\alpha)-1} + 3f(\alpha) = 4$, να βρείτε το α συναρτήσει του $f(1)$.

71. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \ln x$, $g(x) = \ln \frac{e}{x}$, $h(x) = \sqrt{x}$

α. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση $f_1 = \frac{1}{f}$

γ. Να βρείτε τη συνάρτηση $\varphi = h \circ f$

δ. να βρείτε τα διαστήματα του x στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ του ερωτήματος (γ) είναι πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = 1$.

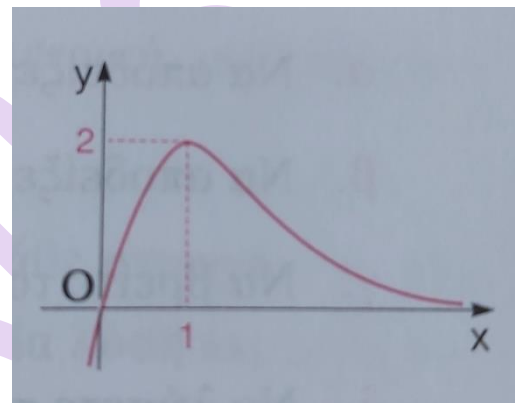
72. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$.

α. Να συγκρίνετε τις τιμές $f\left(\frac{1}{e}\right)$ και $f\left(\frac{1}{\pi}\right)$

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 + 1) > f(x^2 + 2)$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = (x - 1)^4 + 2$.

δ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{-\alpha} f(x) = 1$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.



73. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x + 1) - 1$

α. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

β. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} + \ln(x^2 + 1) > 1$.

γ. Να λύσετε την ανίσωση $e^{x^2} - e^{x+2} > \ln \frac{x+3}{x^2+1}$

δ. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^3+x-1} + \ln(x^3 + x) - 1 - e = \ln \frac{2}{e}$

74. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) + 1 = e^{x-f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1 - 1$.

β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την f^{-1} .

γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία $\varepsilon: y = x$.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 1) - f(\sin x) = 0$.

75. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 2x - 2$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, να βρείτε τα κοινά σημεία της $C_{f^{-1}}$ και της ευθείας $y = x$.

β. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f^{-1} .

γ. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(x))^5 + 2f^{-1}(x) = 0$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x-2) + x^5 < -2x$

76. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 5$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β. Να αποδείξετε ότι η $C_{f^{-1}}$ διέρχεται από το σημείο $M(-4, 0)$.

γ. Να βρείτε τα α, β , αν ισχύει ότι $f(\alpha) = \beta$ και $f(\beta) = \alpha$.

δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(f^{-1}(e^x - 1) - a) < -4$ όπου a ο αριθμός από το ερώτημα (γ).

77. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) + e^{f(x)} = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (1).

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να βρείτε την τιμή $f(1)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = x$ σε όλο το $\mathbb{R}$.

δ. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

i. $f(x^2) - f(x) > x(x-1)$ ii. $e^{f(x^2)} - e^{f(x+2)} < x^2 - x - 2$

78. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2-x} + e^{1-x}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ελάχιστο ίσο με 2.

β. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2-x} + e^{1-x} = 2 - (x-1)^2$.

γ. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = f(x+1) - f(-x)$.

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g αντιστρέφεται.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $e^{2x+1} + \frac{1}{e^{x^2}} < e^{x^2+1} + \frac{1}{e^{2x}}$.

79. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) + x^3 = f\left(\sin \frac{\pi}{5}\right) + f\left(\sin \frac{4\pi}{5}\right)$.