

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3

ΟΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ στο άπειρο

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

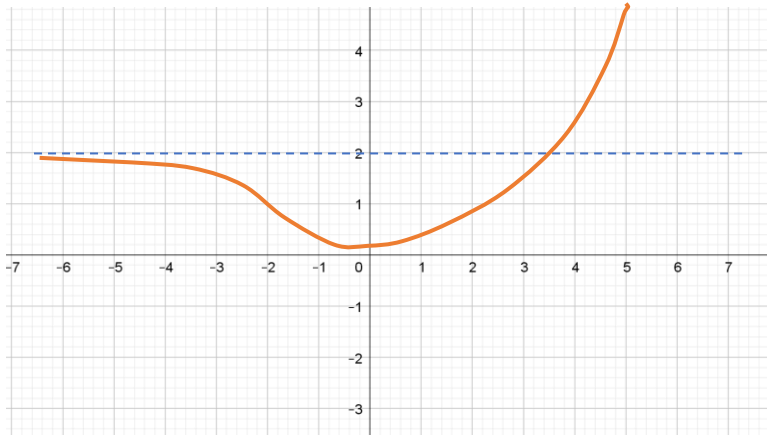
1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στα Όρια Συνάρτησης στο άπειρο

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια:

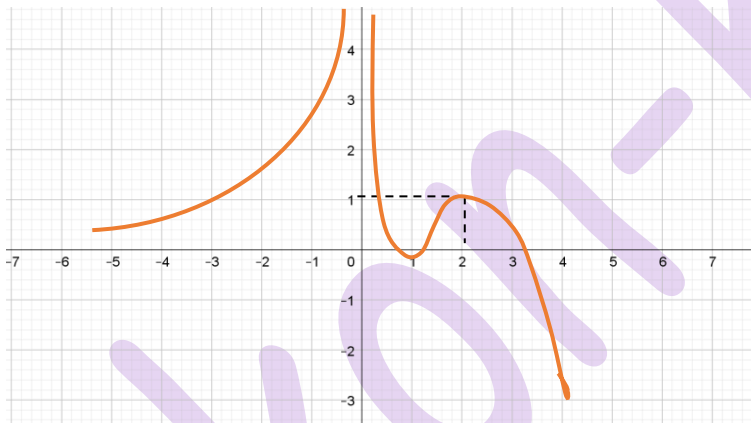
α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

ε. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x) - 2}$

2. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε τα παρακάτω όρια.



α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{f(x)}, \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x) - 1}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(3-x)}{f(x)}$

δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - x - 1)$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 3x - 1)$

γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 5x - 1)$

δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 1)$

ε. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$

στ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$

ζ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - 1 \right)$

η. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$

θ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 1}$

ι. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$

ια. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 2x + 1} - 2x)$

ιβ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$

ιγ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 2}{x+1} - \frac{x^2 + 3}{x-1} \right)$

ιδ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^4 + 6x^3 - 5x + 6| - x^4}{|4x^3 + 2x^2 - 3x| + x^3}$

ιε. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 5x + 2} + 2x)$

4. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{4x^2 + 1} + \mu x)$.
5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\lambda^2 - 4)x^4 + (\lambda - 2)x^3 + \lambda x + 3}{(\lambda^2 + 2\lambda)x^3 + (1 - \lambda)x^2 + x - 2}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^4 + 4\lambda x^3 + (\lambda - 5)x^2 + 7x - 6]$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^v + x - 1}{x^2 + 1}$, $v \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του v .
8. Να βρείτε την τιμή των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 1} + \alpha x + \beta \right) = 4$.
9. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 - 8x - 1} + \lambda x)$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
10. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\begin{array}{lll} \alpha. \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x & \beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^x}{3^x} & \gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{7^x} \\ \delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2}}{8^{x+1}} & \epsilon. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x - 6}{2^x + 4} & \sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x} \\ \zeta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}} \end{array}$$

11. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x - \alpha^x}{2^x + 3\alpha^x}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha > 0$.
12. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - \alpha^x}{2^x + \alpha^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
13. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f\left(\frac{x-1}{x}\right) \right] = 2$. Να υπολογίσετε το
 όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$

14. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$.

Να υπολογίσετε τα όρια: $\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) + f(x) - 1}{f^3(x) - f(x) - 2}$ $\beta. \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{f^2(x) + 1} + f(x))$

15. Έστω $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xf(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$.

α . Να βρείτε τα όρια: $i. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ $ii. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{xf(x) + 3}$

β . Αν επιπλέον ισχύει $f((-\infty, 0)) = (3, +\infty)$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{f(x) - 3}$

16. Έστω συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 5$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 5x) = 2$.

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3f(x) + \lambda x - 2}{xf(x) - 5x^2 + 1} = 3$.

17. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2x^3 - 3x^2 \leq (x^3 - 2x + 4)f(x) \leq 2x^3 + 3x^2$ για

κάθε $x \in \mathbb{R} - \{-2\}$. Να υπολογίσετε τα όρια: α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

18. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 6x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5x + 4} = 4$.

Να υπολογίσετε τα όρια: α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

19. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu \frac{2x-1}{x^2+1}$

β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+2} \sigma\upsilon\nu x$

γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x\eta\mu \frac{1}{x}$

δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$

ε. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\eta\mu x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$

στ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \eta\mu x}{x-1}$

ζ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}}$

η. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$

θ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \eta\mu x)$

ι. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \eta\mu x}$

ια. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2+1}$

ιβ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}}$

ιγ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1}$

ιδ. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)$

ιε. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln x}$

ιστ. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \sqrt{x-1}}{\ln x}$

ιζ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\eta\mu x}$

ιη. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + e^{\frac{1}{x}} \right)$

ιθ. $\lim_{x \rightarrow 1} \ln \frac{x}{x-1}$

κ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^{2x}) - x]$

κα. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sigma\upsilon\nu x)$

κβ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\ln x}$

κγ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x^2+3}{x+5}}$

κδ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3^x}{\pi^x} \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi}{3} \right)^x \right)$

κε. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{3x+1} - 4^x + 2^x + 5}{8^x + 3 \cdot 4^x + 2^{x+1} + 1}$

κστ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6\ln^2 x - 5\ln x + 4}{3\ln^2 x + 2\ln x - 1}$

κζ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2 - \eta\mu x}{x}$

κη. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3 - 5x) - 2\ln(x+2)]$

κθ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2^x + 1) - x]$

Β. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στα Όρια Συνάρτησης στο άπειρο

20. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x + 1}{x^3 + 2x + 1}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - x + 1}{x^3 + x + 1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{4 + x^2}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{2x^2+3}{x} \right)$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x-7}{|x-2|} - \frac{x-3}{x-2} \right)$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right)$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^3 - 2x + 3| + x - 1}{x^4 + 2x + 2}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow +\infty} (|x^3 - x^2 - 1| - |-x^2 + 3| - 2x^3)$$

$$\alpha\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+3)^{12} (x^2 - 2x - 4)^9}{(2x^3 - 5x + 1)^{10}}$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^7 (x+4)^{10}}{(x^2 + x + 1)^6}$$

$$\iota\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

$$\iota\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 5x + 2}$$

$$\iota\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} + x$$

$$\iota\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$\iota\zeta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x}$$

$$\iota\eta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\iota\theta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 1} - x$$

$$\kappa. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x$$

$$\kappa\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^2 - 5x + 1} - x \right)$$

$$\kappa\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + x - 2} + \sqrt{4x^2 - 3x + 1} - 3x \right)$$

21. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^x$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\pi}{4} \right)^x$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{4^x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x}{6^x}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+3}}{3^{x+2}}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^x}{2^x + 1}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 7^x}{2^x + 3^x}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{x+2} + 5^{x-1}}{7^{x+1} + 3^{x+1}}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3 \cdot 2^x - 1}{e^x + 3^x - 1}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} - 3^{x+2}}{e^x - 2^{x+1}}$$

$$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 2^x + 1)$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - \pi^x - 3^x)$$

$$\iota\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3^{x+1} - 2)$$

$$\iota\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot 3^x + 2^{x+1}}{x \cdot 3^{x+2} - 2^x}$$

$$\iota\epsilon. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu(2^x + 3^{x+1})}{\eta\mu(3^x + 2^{x+1})}$$

$$\iota\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1 + \ln x)$$

$$\iota\zeta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln x - \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\iota\eta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln x - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

$$\iota\theta. \lim_{x \rightarrow 0} \left(e^{\frac{1}{x}} \ln x \right)$$

$$\kappa. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - 5}{\ln x}$$

$$\kappa\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{1-x}}{\ln x}$$

$$\kappa\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x - \frac{1}{x} + 1 \right)$$

$$\kappa\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - \ln x - 1)$$

$$\kappa\delta. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{1-x}$$

$$\kappa\epsilon. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln \sqrt{x^2 + 1} + x)$$

$$\kappa\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 - e^x)$$

$$\kappa\zeta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$\kappa\eta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\ln(1 + x^2) - \ln(2 - x))$$

$$\kappa\theta. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1 + e^x) - x]$$

$$\lambda. \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(3^x + 5^x) - x]$$

$$\lambda\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2}$$

$$\lambda\beta. \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lambda\gamma. \lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{x-1}}$$

$$\lambda\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{x}$$

$$\lambda\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

22. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5\eta\mu x}{2x - 7\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \eta\mu x)$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(\sqrt{x^2 + 3} - x) \eta\mu 5x \right]$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{\ln x}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \eta\mu \frac{1}{x}}{2x + 3}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \eta\mu \frac{1}{x}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

$$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x \eta\mu x}{3^x}$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3^x \cdot \eta\mu \frac{1}{2^x} \right)$$

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \frac{2x+1}{e^x-1}, & x < 0 \end{cases}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^x + x}, & x < 0 \\ \frac{\ln x}{x}, & x > 0 \end{cases}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln(x-1)$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται β. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f^{-1}(x))$

26. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x f \left(\frac{x+1}{x} \right) \right] = 3$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$.

27. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^3(x) - f(x) + 1}{2f^2(x) - f(x) + 3}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\sqrt{f^2(x) + 1} - f(x) \right)$$

28. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 2) = 0$, να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$ γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + x^2 + 1}{xf(x) - 3x^2 + 2}$

29. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x\sqrt{x^2 + 1} + x^2) = 3$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x^2)$ γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$
 δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 4x^2 + 2x}{f(x) - x + 3}$ ε. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f^2(x) + 3f(x)| + f^2(x) + 1}{f^2(x) + 2}$

30. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\sqrt{9x^2 + 1} - 2x \leq f(x) + x \leq \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x > 0$.

α. Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(f^2(x) - 3f(x))}{f^2(x) + f(x)}$

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x > 0$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(2^{\frac{1}{f(x)}} + 1 \right) - \frac{1}{f(x)} \right)$

31. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2x(f(x) + 1) \leq 1 + f(x)\sqrt{4x^2 - 3x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^5(x) + 2f(x) - 5}{f^2(x) + 1}$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{f^2(x) - 3f(x) + 2} - f(x)}{2f(x) - 1}$ δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-f(x)} + 2^{1-f(x)}}{e^{2-f(x)} + 3^{3-f(x)}}$

32. Έστω $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$, ώστε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = 1$

33. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2 + 2x + 3 \leq f(x) \leq 2x^2 + 4x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)\eta\mu x}{x^3}$ iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - f(x)\sigma\upsilon\nu \frac{1}{f(x)} \right)$

β. Να αποδείξετε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο, το οποίο και να βρείτε.

34. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 4)x^3 + (\lambda + 2)x - 3]$

35. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda - 2)x^3 + (\mu - 3\lambda)x^2 + (\lambda - \mu)x + 2020]$ για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

36. α. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + x^2 + 3}{\mu x^2 - 3x + 5}$

β. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2\mu - 1)x^3 - 3x + 1}{(\mu + 1)x^2 + 2}$

37. α. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x + 1} - \mu x)$

β. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες το $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\mu x^2 + \sqrt{x^2 + 1})$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x^\nu + 3x - 1}{x^3 - 1}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές

του $\nu \in \mathbb{N}^*$.

39. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda x^\nu - x - 1}{x^5 + x + 1} = 2$, να βρείτε τους $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$

40. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{x+2} + a^x}{3^x + a^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

41. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^x + a^{x+2}}{a^x - 5^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $a \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

42. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\alpha - 2)x^2 + (3\alpha - 2\beta)x + 7}{(\beta + 3)x - 13} = 4$

43. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 8x - 5} + ax + \beta) = -5$

44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 1}{4x^2 - 3x - 1}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{7}{5}$$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

β. να βρείτε τους αριθμούς β και γ .

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

δ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu(4f^2(x) - 9)}{\eta \mu(2f^2(x) + 3f(x))}$

45. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x\sqrt{x^2 + 1} + x^2) = 3$.

Να υπολογίσετε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

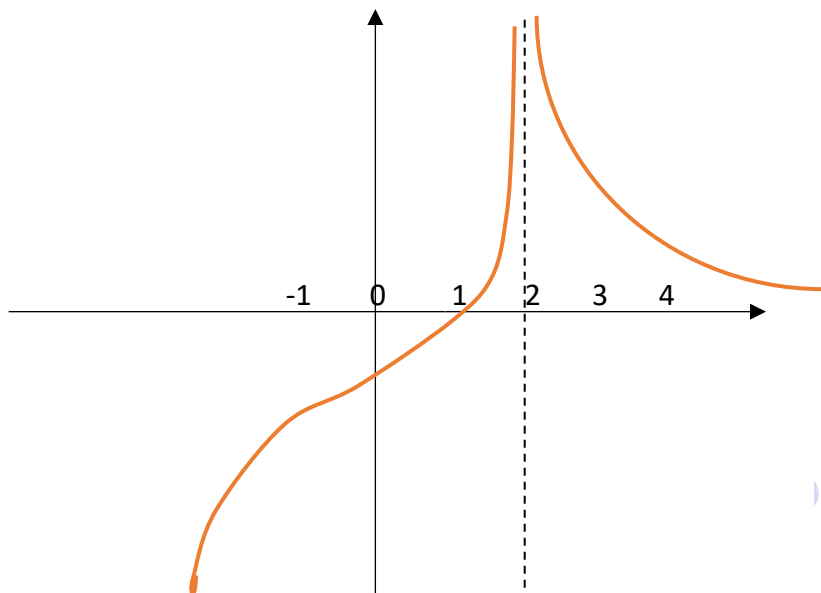
β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + 2x^2)$

γ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$

δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 4x^2 + 2x}{f(x) - x + 3}$

ε. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f^2(x) + 3f(x)| + f^2(x) + 1}{f^2(x) + 2}$

46. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να υπολογίσετε τα όρια:



A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^3 + 2x^2) f(x)]$

B. $\lim_{x \rightarrow 2} e^{f(x)}$

Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x))$

Δ. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$

Ε. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{f(x)} \right]$

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\mu-1)x^3 + x^2 + x - 6}{\mu x^2 - 5x + 6}$ με $\mu \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$

β. Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε:

i). Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της f .

ii). Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in D_f$ είναι $f(x) = \frac{6}{x-3} + 1$

iii). Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 1}$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

δ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

ε. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

στ. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)}$

50. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + x - 1$ και $g(x) = \frac{x+1}{f(x)}$

α. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

51. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9x^2 + x + 6} - \beta x, & x \leq 1 \\ \frac{ax^2 + \beta x + 5}{x - x^2}, & x > 1 \end{cases}$ για την οποία υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

β. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

52. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-2)$ και $g(x) = e^x - 1$

α. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι 1-1.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να ορίσετε τη συνάρτηση g^{-1} .

δ. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f^{-1}(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g^{-1}(x))$

ε. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

στ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)]$

53. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Να βρείτε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

γ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

δ. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$

ε. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

στ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\eta\mu x) + x^3 f\left(\frac{1}{x^2}\right)}{x}$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ iv) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

55. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$. Να βρείτε τα όρια:

α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{\eta\mu x}$

γ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$

δ. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(g(x))$