

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 5

ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στη Συνέχεια Συνάρτησης

1. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο δοσμένο x_0 .

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x < 0 \\ 2x+1, & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\delta. f(x) = \begin{cases} 3x^2-4x, & x < 2 \\ 7, & x = 2 \\ 5x-6, & x > 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$\epsilon. f(x) = \begin{cases} x^3-3x, & x \leq -1 \\ x^2+x, & x > 1 \end{cases} \quad x_0 = -1$$

$$\sigma\tau. f(x) = \begin{cases} x\eta\mu\frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

2. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής.

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} x^3-5x^2+9x+6, & x \leq 2 \\ \frac{x^2-2x}{\sqrt{x+7}-3}, & x > 2 \end{cases}$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x < 0 \\ (x+1)e^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x < 1 \\ 3, & x = 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x > 1 \end{cases}$$

$$3. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x \cdot \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$$

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[-\pi, 0]$

$$4. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 2| - |x - 2|}{|x + 5| - 5}, & x \neq 0, -10 \\ 1, & x = 0 \\ 2, & x = -10 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο: α) στο 0, β) στο -10

$$5. \text{ Να βρείτε τις τιμές των } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \text{ ώστε η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^3 + \beta x^2 + 2x + 1, & x < 2 \\ \alpha, & x = 2 \\ \frac{x^2 + \beta x + \gamma}{x - 2}, & x > 2 \end{cases}$$

να είναι συνεχής.

$$6. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 4ae^x + \beta \sin x, & x < 0 \\ x + 2, & 0 \leq x \leq 1 \\ \ln x + \alpha x - \beta, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η f είναι συνεχής.

$$7. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{e^x}, & x > 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του a , για τις οποίες η f είναι συνεχής.

8. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(x - 2)f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.

9. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $xf(x) \leq \eta\mu x + x^2 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

10. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f^2(x) + 2x \leq 2xf(x) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

11. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) + \sqrt{x+3} - 2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{9}{16}$.

Να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

12. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει: $xf(x) = x^2 + \eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

13. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$, να δείξετε ότι $f(1) = 2$.

14. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) = \ln x$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

15. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει: $2xf(x) = x + \eta\mu f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι:

α. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

16. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

β. Αν η f είναι συνεχής στο 2, να αποδείξετε ότι:

i) η f είναι συνεχής στο 0.

ii) η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

17. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει: $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$, για κάθε $x, y \in (0, +\infty)$. Να δείξετε ότι, αν η f είναι συνεχής στο 1, τότε η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$.

B. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στη Συνέχεια Συνάρτησης

18. Να εξετάσετε αν καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής στο δοσμένο x_0 .

$$\alpha. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases} \quad x_0 = 2$$

$$\beta. f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\gamma. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases} \quad x_0 = 1$$

$$\delta. f(x) = \begin{cases} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x < 0 \\ \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\epsilon. f(x) = \begin{cases} e^x + \eta\mu x, & x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\sigma\tau. f(x) = \begin{cases} xe^{1-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ \ln(1+x^2), & x \leq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\zeta. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln x}, & 0 < x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$\eta. f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}, & x > 0 \\ \eta\mu x, & x \leq 0 \end{cases} \quad x_0 = 0$$

$$19. \text{ Δίνεται η συνεχής συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 - 4\alpha}{x - 2}, & x < 2 \\ 4, & x = 2 \\ \beta - \alpha x, & x > 2 \end{cases}.$$

α. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

β. να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ. να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

20. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{|x+1|}, & x \neq -1 \\ \gamma, & x = -1 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $xf(x) = 2x + 3\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, να βρείτε το $f(0)$ και τον τύπο της f .

22. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2 + 3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να βρείτε τον τύπο της f .

23. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1 + \eta\mu x}{x^2 + x} = \lambda \in \mathbb{R}$ και $A(0, -1) \in C_f$

α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 1}{\eta\mu x} = 3$, να βρείτε την τιμή του λ .

24. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - \sqrt{x+7}}{x^2 - 4} = \frac{1}{4}$.

Να υπολογίσετε:

α. την τιμή $f(2)$

β. το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

γ. το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{xf(x) - 2f(2)}{x - 2}$

25. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x) \leq x\sqrt{x^2 + 3} - 10 + \sqrt{25x^2 + 75} - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την

οποία ισχύουν: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 - x} = 3$ και $g(f(0)) = 2020$

α. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 3}{g(x)}$.

γ. Να βρείτε τον $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$ να είναι συνεχής.

26. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

27. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $|xf(x) + a - \sqrt{x+4}| \leq x^2$ για κάθε $x \in [-4, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι $a = 2$.

β. Να υπολογίσετε την τιμή του $f(0)$.

28. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(2-x) + f(x) = 2x^2 - 4x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και στο 2.

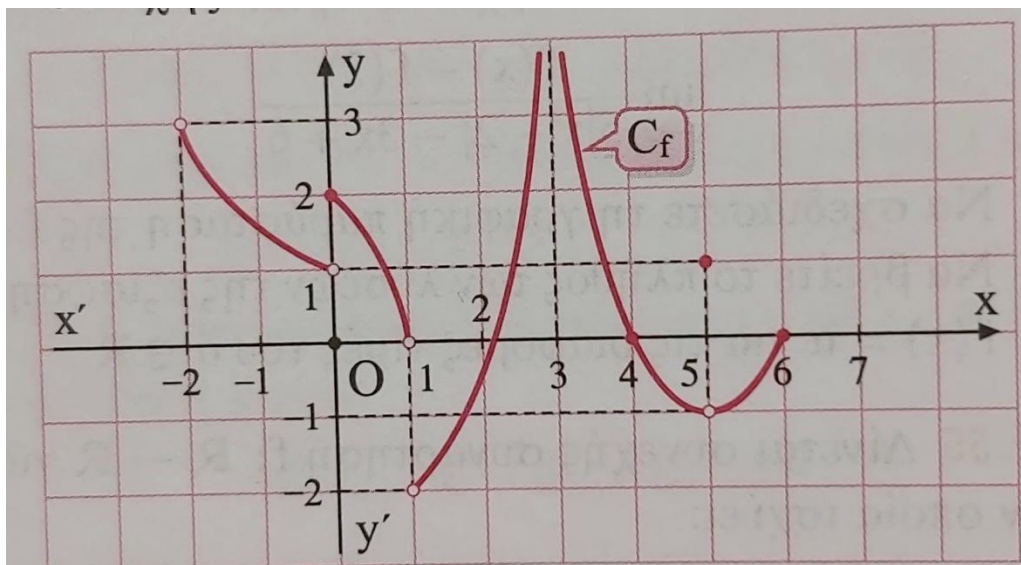
29. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x - \kappa)(x + \kappa), & x \leq 2 \\ \kappa x + 5, & x > 2 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι $\kappa = -1$.

β. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{5|x - 2| - 3x + 6}$

γ. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

30. Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής

β. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x + 2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (f^2(x) + 2f(x))$

iii) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right)}{f(x)}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{f(x) + 1}$

v) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 3} (\ln(2^{f(x)} + x^2 + 3) - f(x))$

31. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β. Αν η f είναι συνεχής στο 2, να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο $f(2)$.

32. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

$$f^2(x) + e^2 g^2(x) + e^{2x} \leq 2xf(x) + 2e^{x+1}g(x) - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο 1.

β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) + x - xg(x) - f(x)}{x - 1}$

Β. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

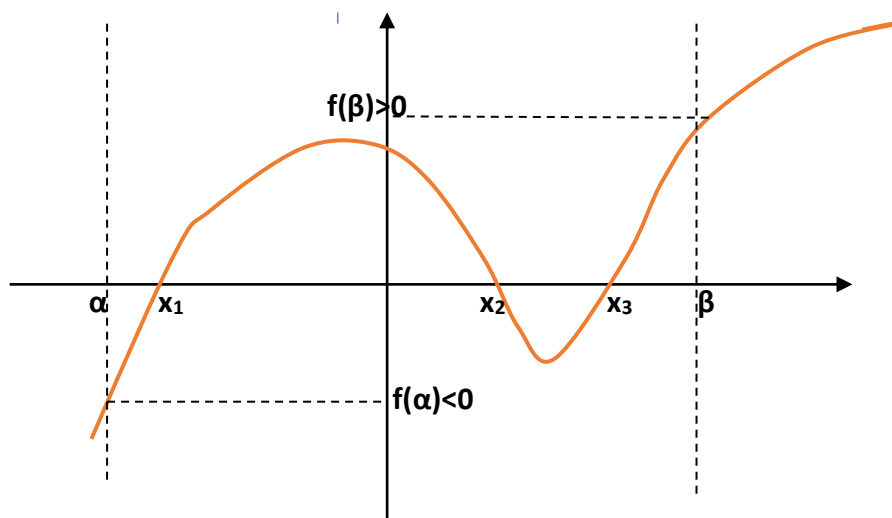
Θεώρημα Bolzano:

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Αν:

- η f είναι συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq A$, και
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ (δηλαδή οι τιμές της f στα άκρα του διαστήματος είναι ετερόσημες), τότε:

Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία του θεωρήματος



Παρατηρήσεις

1. Για να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano δεν είναι υποχρεωτικό η συνάρτηση να έχει πεδίο ορισμού ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Μπορεί να έχει πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα (ή ένωση διαστημάτων) A και απλά εμείς τη μελετάμε σε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq A$
2. Οι προϋποθέσεις του θεωρήματος είναι απαραίτητες για να μπορώ να το εφαρμόσω. Αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ή αν δεν ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε πολύ απλά δεν μπορώ να εφαρμόσω το θεώρημα. Προσοχή! **Δεν λέω ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα, απλά δεν μπορώ να ξέρω αν ισχύει.**
3. Το αντίστροφο του θεωρήματος γενικά δεν ισχύει. Δηλαδή αν ξέρω ότι σε μια συνάρτηση f υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$, τότε δεν έχω ιδέα αν η συνάρτηση είναι συνεχής ή όχι και δεν έχω ιδέα αν οι τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι ετερόσημες ή ομόσημες.
4. Αν δεν ισχύει το συμπέρασμα, δηλαδή αν για κάθε $x_0 \in (\alpha, \beta)$ το $f(x_0) \neq 0$ (δηλαδή αν η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται πουθενά μέσα στο (α, β)), τότε σίγουρα δεν ισχύουν οι υποθέσεις, δηλαδή σίγουρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ή οι τιμές $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ είναι ομόσημες. Και επειδή οι περισσότερες συναρτήσεις είναι συνεχείς, αυτό που συμβαίνει είναι ότι οι τιμές $f(\alpha)$

και $f(\beta)$ είναι ομόσημες, δηλαδή η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο. Άρα ισχύει ότι: « **Αν μια συνάρτηση συνεχής σε διάστημα $[\alpha, \beta]$ δεν μηδενίζεται πουθενά στο εσωτερικό του διαστήματος, τότε η συνάρτηση διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλαδή η συνάρτηση είναι συνέχεια θετική ή συνέχεια αρνητική** ».

5. Τι σημαίνει το συμπέρασμα του θεωρήματος:

«Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ »;

Ισοδύναμα αυτό σημαίνει ότι:

«η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα και μάλιστα αυτή η ρίζα (ή οι ρίζες) βρίσκονται στο διάστημα (α, β) »

Ισοδύναμα αυτό σημαίνει ότι:

«η γραφική παράσταση της f , δηλαδή η γραφική παράσταση C_f , τέμνει τουλάχιστον μια φορά τον άξονα $x'x$ και μάλιστα το σημείο τομής βρίσκεται μέσα στο διάστημα (α, β) ».

ΚΟΝΚΡΙΣ

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στο θεώρημα Bolzano

33. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + x^2 + 3x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ e^x - x + 3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\pi, 1]$.

34. Να αποδείξετε ότι:

α. Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[0, 1]$.

β. Η εξίσωση $x^3 + x - 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

35. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x + \ln x^4 = x^2 + 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

36. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = (0, 1)$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x - 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

37. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{e^x + 1}{x - 2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο στο διάστημα $(1, e)$.

39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x - e^x$ και $g(x) = x^2 - 4$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$.

β. Οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

40. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, -1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$x_0 (f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - \alpha$$

41. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(1) + f(2) = 7$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $f(x) + x^2 = 4x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $[1, 2]$.

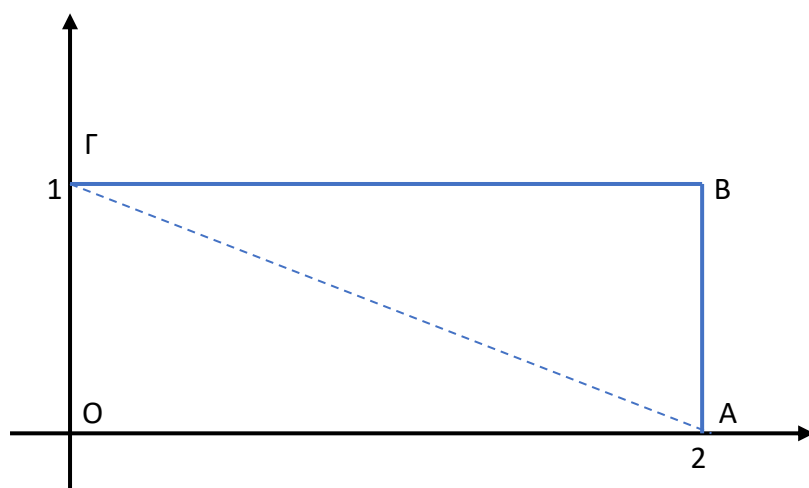
42. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $e^{x_0} + x_0 = 2$

43. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

44. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(3 - x)\ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1, 4)$.

45. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = \sin x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

46. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 6x^2 + 1 = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-1, 2)$.
47. α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = x^2 - 4x + 2$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.
β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma x - 2021 = 0$ έχει μια τουλάχιστον θετική ρίζα.
48. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x-1}$ έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
49. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = [0, \ln 2]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \ln(x_0 + 1)$.
50. Δίνεται το ορθογώνιο ΟΑΒΓ του παρακάτω σχήματος και μια συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 2]$ της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται μέσα στο χωρίο που ορίζει το ορθογώνιο.



51. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $-1 < f(x) < 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$

Β. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στο θεώρημα Bolzano

52. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
- α. $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
β. $e^x = 2 - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
γ. $e^{x-2} = 2 - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
δ. $\sin x = x - 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.
ε. $\ln(x+1) = 1 - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- στ. $\frac{x^4 + 1}{x-1} + \frac{x^6 + 1}{x-2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.
- ζ. $\frac{e^x}{x-1} + \frac{\ln x}{x-2} = 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

η. $\frac{\eta\mu x}{x-1} = 1 + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x-3}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$.

θ. $\sigma\upsilon\nu x = x(x - \eta\mu x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\pi, 0)$ και $(0, \pi)$.

ι. $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$

ια. $3x + \ln x = x^2 + 1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ιβ. $e^{\frac{1}{x}} = x + 2$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

53. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta^2 < 3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

54. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f: [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα
- Η f έχει κοινό σημείο με τον άξονα x' του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(1, 3)$
- $1 < g(x) < 3$ για κάθε $x \in [1, 3]$

Να αποδείξετε ότι καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 3)$

i) $(x-1)f(x-2) = (x-3)f(x+2)$

ii) $(f \circ g)(x) + x = f(x) + g(x)$

55. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ , η εξίσωση $e^x + 2021 = x^2 + \lambda x$ έχει μια τουλάχιστον αρνητική ρίζα.

56. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία να ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\eta\mu x_0) = \eta\mu x_0$

57. Να αποδείξετε ότι για οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β η εξίσωση:

$x^2 \eta\mu \alpha - x \alpha = (x+1)(\beta^x - \beta)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $[-1, 1]$.

58. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \leq 0 \\ e^x - 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$

α. Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

59. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + 2021 = x^2 + \sqrt{-x}$ έχει μοναδική ρίζα.

60. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 = 3x + 1$ έχει ακριβώς δύο αρνητικές ρίζες και ακριβώς μια θετική ρίζα.

61. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{x+2}$ με $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-2, 2)$.

62. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x$:

α. έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$

β. έχει δύο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

63. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ η οποία είναι γνησίως μονότονη. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0, 1)$ υπάρχει μοναδικό x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1 - x_0^3$.

64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x - 1$. Να αποδείξετε ότι:

α. η εξίσωση $2x^3 = 1 - x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β. υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε να μην υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$

65. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $xf(x) + 2 = f(x) + \sqrt{3x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $4f(x_0) = 7x_0$.

66. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία παρουσιάζει ελάχιστο το 1 μόνο στο σημείο 0.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha) - 1}{\alpha - 1} + \frac{f(\beta) - 1}{\beta - 2} = 5$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$ για κάθε $\alpha, \beta \neq 0$.

β. Αν $g(x) = e^x + x - 2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f(g(x)) = 1$, έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, 1)$.

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - 4x - 2$

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(-1, 0)$.

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = -e^{-x} - 4$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

68. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 1)$.

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = -2x + 6$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

β. Έστω γνησίως αύξουσα και συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το μέσο M του AB . Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = -\frac{\ln(x-1)}{2020}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_h έχουν ένα

τουλάχιστον κοινό σημείο.

69. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1-x)$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β. Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

γ. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f^{-1} και $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$ έχουν μοναδικό κοινό σημείο.

δ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x)}$

70. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και περιττή, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9)f(x) + \eta\mu(x - 3)}{\sqrt{x - 2} - 1} = -22$$

α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β. Να υπολογίσετε την τιμή $f(3)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^2 = 6$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-3, 3)$.

δ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(1) = -2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x^3 = 0$ έχει τρεις τουλάχιστον λύσεις στο $(-3, 3)$, από τις οποίες οι δύο είναι αντίθετες.

71. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως μονότονη, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x + 2} - 2)f(x) - \eta\mu(\pi x)}{x^2 - 4} = -\frac{\pi}{4}$$

α. Να υπολογίσετε την τιμή $f(2)$.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x - 5)f(x) = (x - 1)f(x - 2)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(1, 5)$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^3(e^{-x} \ln x) - f^3(2e^{-x} - x) = f(2e^{-x} - x) - f(e^{-x} \ln x)$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0, +\infty)$

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x - \ln(2 - x) + 2021$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού D_f της f .

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1 - 1$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f^{-1}(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση.

Γ. ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ BOLZANO – Θ.Ε.Τ. – Θ.Μ.Ε.Τ. – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ

Α. Βασικές Ασκήσεις στα θεωρήματα που απορρέουν από το θεώρημα Bolzano

73. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 1$ η οποία είναι συνεχής και ισχύει: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln(f(x))$.

74. Βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων:

α. $f(x) = 2x^3 - x - 1$

β. $f(x) = x - \eta\mu x$

γ. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$

75. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να

βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(1)x^2 + 1}{f(0)x + 2}$

76. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xf(x) + 2 = x(x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-2, 1)$.

β. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) + 7\eta\mu x}{5x - 2\eta\mu x} = 2$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)x^3 + 5x^2 - 3)$

77. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν $f(3) = -2$ και οι αριθμοί 1 και 4 είναι διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2)x^3 - x + 1)$

78. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)| = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν $f(0) = -3$, να βρείτε τον τύπο της f .

79. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 1$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = x^2 + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

80. Έστω $f : [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει: $x^2 + f^2(x) = 3x + 4$ για κάθε $x \in [-1, 4]$.

α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β. Αν επιπλέον η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'g$ στο σημείο με τεταγμένη -2 , να βρείτε τον τύπο της f .

81. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f^2(x) - x^2 = -2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

82. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = 1$ και

$e^{2x} f^2(x) - 2x^2 e^x f(x) = 2x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

83. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 5x^3 - x + 10$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε

$f(\xi) = 50$ 9 (ή $f(\xi) = \frac{4679}{83}$).

84. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1, 5]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \frac{3f(2) + 5f(3) + 7f(4)}{15}$.
85. Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας, ακριβώς, $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0) = \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3}$.
86. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:
- α. $f^3(x) + 2f^2(x) - 5f(x) - 6 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β. $(f(x) - 3x^2 - 3)(f(x) - 2x^2 - 2) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
87. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^4 \cdot (x-3)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο θέσεις x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ελάχιστων και στη συνέχεια, ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο $[x_1, x_2]$.
88. Έστω $f : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από την ευθεία $\varepsilon: y = x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της C_f που απέχει από την ευθεία ε περισσότερο από ότι απέχουν τα υπόλοιπα σημεία της C_f .
89. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x$.
- α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- β. Να βρείτε το $f(B)$ όταν: i) $B = [0, 1]$ ii) $B = [0, 1)$ iii) $B = (-\infty, 0]$
- γ. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f , όταν είναι ορισμένη στο $B = [0, 1]$.
90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 - \sqrt{x-1} - \ln x$
- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
91. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$
- α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2021$ έχει μια, ακριβώς ρίζα.
- γ. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_0 \in (0, 1]$, τέτοιο, ώστε $f(x_0) = e^{x_0} - 2$.
92. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Για τη συνάρτηση ισχύει ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$. Επίσης ισχύει ότι $f(1) = -2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- α. Να φτιάξετε τον πίνακα μονοτονίας και να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει, ακριβώς, δύο ρίζες.
- γ. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.
93. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + \ln x = 2021$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

Β. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στα Θεωρήματα που απορρέουν από το Θεώρημα Bolzano

94. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση f με $f(0) = 1$, για την οποία ισχύει $f^2(x) = 1 + 2xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
95. Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(2) = 2$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει $f^2(x) + 2 = x + 2f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .
96. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση με $f(0) = -1$ για την οποία ισχύει $x^2 + f^2(x) = 1$, για κάθε $x \in [-1, 1]$. Να βρείτε τον τύπο της f .
97. Έστω $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $4x^2 + f^2(x) = 4$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.
- α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- β. Να δείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1, 1)$.
- γ. Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f ;
- δ. Αν $f(0) = 2$, να βρείτε τον τύπο της f .
98. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x) + 2x = x^2 + 1$ για $x \in \mathbb{R}$.
99. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [2, 4]$ τέτοιο ώστε: $f(x_0) = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(4)}{6}$.
100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + x & , x \leq 0 \\ 1 - \ln(x+1) & , x > 0 \end{cases}$
- α. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β. Να δείξετε ότι η f έχει, ακριβώς, δύο ετερόσημες ρίζες.
- γ. Αν x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) οι ρίζες του ερωτήματος (β) να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha) - 1}{x - x_1} + \frac{f(\beta) - 1}{x - x_2} = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$
- δ. Αν $\kappa \leq 0 \leq \lambda$ και ισχύει $e^\kappa - 1 = \ln(\lambda + 1) - \kappa$, να βρείτε τις τιμές των κ και λ .
101. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι συνεχής με $f(1) = -2$, να βρείτε τα όρια: α). $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|f(x)| - 2}{f^2(x) + 2f(x)}$ β). $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(f(x) - 1)x^3 + 5x - 1]$
102. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής. Οι αριθμοί 0 και 1 είναι διαδοχικές ρίζες της f και $f\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. Να βρείτε τα όρια: α). $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)}$ β). $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\frac{1}{f(x)}}$
103. Βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f , όταν:
- A. $f^2(x) = e^{2x} + 2e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.
- B. $f^2(x) = 1 - 2xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -1$.
- Γ. $|f(x)| = 1 - x^2$, για $x \in [-1, 1]$ και $f(0) = 1$.

Δ. $e^{f(x)}(e^{f(x)} - 2x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ε. $f^2(x) + 2e^x = e^{2x} + 1$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$ με $f(\ln 2) = -1$

ΣΤ. $f^3(x) - 6e^x f^2(x) + 11e^{2x} f(x) - 6e^{3x} = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

104. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$. Να βρείτε τα όρια:

A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x + f(x)}$

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$

Γ. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{f(x)}$

105. Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(x) = \frac{1}{x} - x + 1$.

A. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B. Να δείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής, να βρείτε τα όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f^{-1}(x)}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^{-1}(x) - x}{x + f^{-1}(x)}$

106. Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι $1-1$, συνεχής και ισχύει $0 < f(0) < f(1)$. Να αποδείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

107. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής και ισχύουν:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \eta \mu x - 2}{x^2 + x} = 1$ και $e^{-x}(f^2(x) - 1) = 2f(x) - e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Να βρείτε το $f(0)$.

B. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ. να δείξετε ότι η C_f και η γραφικής παράσταση της $g(x) = \frac{1}{x} + 1$, $x \in (0, 1)$ έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

Δ. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - 2^x}{f(x) - 3^x}$

108. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1)$

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

B. να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

Γ. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα, ακριβώς, σημείο με τετμημένη $x_0 \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$.

Δ. να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(e^a - 1) - 1}{x - 1} - \frac{f(|\eta \mu a|) - f(a)}{x - 2} = 2021$ έχει μια, τουλάχιστον,

ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$, για κάθε $a > 0$.

109. Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 1]$. Αν είναι $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να αποδείξετε ότι:

A. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$,

B. Υπάρχει $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:
$$f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$$

110. Δίνεται συνάρτηση $f : [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως μονότονη. Η γραφική παράσταση της f τέμνει την y' στο σημείο με τεταγμένη 5 και ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 4x)f(x) + \eta\mu(x-4)}{\sqrt{x-3} - 1} = 18$$

A. Να υπολογίσετε την τιμή $f(4)$.

B. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f και το σύνολο τιμών της.

Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 4$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα ακριβώς σημείο.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,4)$ τέτοιο, ώστε: $3f(\xi) = f(1) + f(2) + f(3)$.

Ε. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $h(x) = f(x+3) - 3x$.

111. Αν η συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $1-1$ και συνεχής, τότε είναι γνησίως μονότονη.