

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 7

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

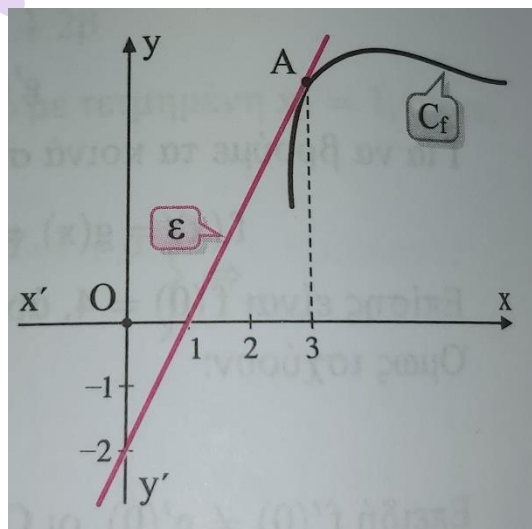
Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

Α. Βασικές Ασκήσεις στην Εφαπτομένη Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

- Σε καθεμιά από τις επόμενες περιπτώσεις, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M .
α. $f(x) = x^2 - 4x$, στο $M(3, f(3))$ β. $f(x) = x^3 - 1$, στο $M(0, f(0))$
γ. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1, & x > 1 \end{cases}$, στο $M(1, f(1))$
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$. Να βρείτε την εφαπτομένη ϵ της C_f που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = 45^\circ$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία:
α. Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5.
β. Είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta: y = x + 5$.
γ. Είναι κάθετη στην ευθεία $\eta: x - 3y + 12 = 0$.
δ. Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
ε. Σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 2x$
α. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης, που διέρχονται από το σημείο $M(1, 2)$.
β. Να σχεδιάσετε τη C_f και να βρείτε το εμβαδόν E του τριγώνου που σχηματίζουν οι εφαπτομένες του ερωτήματος (α) με τον άξονα $x'x$.
- Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 3$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $\epsilon: y = 10x - 9$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.
α. Να βρείτε τις τιμές των a και β .
β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\gamma: y = 3x + 2$ εφάπτεται στη C_f .
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 1$. Να βρείτε τα σημεία της C_f , που οι εφαπτόμενες σε αυτά είναι:
α. Κάθετες στην ευθεία $\epsilon: x + 2y - 1 = 0$
β. Παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta \ln x - \ln \beta$. Να βρείτε τις τιμές των a, β για τις οποίες η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, 1)$ έχει κλίση 4.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x - 1$. Να δείξετε ότι η ευθεία $\epsilon: y = 3x - 2$ εφάπτεται της C_f και να βρείτε το σημείο επαφής.

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \lambda x + 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = -x + \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η ευθεία ε εφάπτεται της C_f .
10. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + \beta x + 3$ και $g(x) = x^2 - ax - \beta$. Να βρείτε τις τιμές των α, β , για τις οποίες οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο τους με τετμημένη $x_0 = -2$.
11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3x + 3$ και $g(x) = -\frac{1}{x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινές εφαπτομένες στα κοινά της σημεία.
12. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = a \ln x + \beta x^2$ και $g(x) = x^2 + 2\beta x + a$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.
13. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 + x + 4$.
 α. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g στο κοινό τους σημείο δεν έχουν κοινή εφαπτομένη.
 β. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g .
14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = 2x^2 + 2x$. Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g .
15. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα, ακριβώς $x_0 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + \ln x$ στο σημείο της με τετμημένη x_0 , να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
16. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται τμήμα της C_f και η ευθεία ε που εφάπτεται της C_f στο σημείο A .
 α. να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A και την $f'(3)$.
 β. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - \sqrt{x-2} - x}{x-3}$
 γ. Αν $g(x) = f^2(x) - f(x^2 - 2x)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $\Delta(3, g(3))$.
17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} + x - 1$.
 α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f' .
 β. Να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας ω που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x, f(x))$ με τον άξονα x' .
18. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 3$,



α. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

19. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν $f(1) = 1$ και

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1+2h)}{h} = -3. \text{ Να βρείτε την εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } x_0 = 1.$$

20. Έστω συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$.

α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το $D_{f^{-1}}$

β. Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 3$.

B. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στην Εφαπτομένη Γραφικής Παράστασης Συνάρτησης

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $A(-3, -10)$.

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Να βρείτε τις τετμημένες x των σημείων της γραφικής παράστασης της f που οι εφαπτόμενες σ' αυτά:

α. Έχουν κλίση 2.

β. Σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία ω τέτοια ώστε:

i) $\omega = \frac{3\pi}{4}$ ii) $\epsilon\phi\omega > 1$ iii) ω : αμβλεία

23. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5x + 11, & x \leq -2 \\ 2x^2 + 9x + 15, & x > -2 \end{cases}$ και $g(x) = x^2 - 3x - 5$

α. Να αποδείξετε ότι η C_f δέχεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(-2, f(-2))$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β. Έστω ϵ η εφαπτομένη που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

i) Να αποδείξετε ότι η ϵ τέμνει τη C_g σε δύο σημεία A και B.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την ευθεία ϵ και τις εφαπτόμενες της C_g στα σημεία A και B.

24. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \leq 1 \\ 2ax + 2\beta - 5, & x > 1 \end{cases}$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 2$ και $\beta = 4$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $g(x) = f^2(x) + f(x^3)$ στο σημείο της $B(1, g(1))$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 + 4x$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ οι εφαπτόμενες της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$ διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε.

β. Έστω ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της: $A\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ και $B(0, f(0))$ είναι μεταξύ τους

κάθετες. Να βρείτε:

i) τον αριθμό α .

ii) τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της C_f που είναι παράλληλες στη διχοτόμο της $1^{\text{ης}}$ και $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων.

iii) την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2$ με $x \in [0, +\infty)$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μια τουλάχιστον εφαπτομένη της C_f που τέμνει τον άξονα $y' y$ στο σημείο με τεταγμένη -2020 .

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία:

$$\zeta: y = 2020x + 2030.$$

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \beta x$. Η ευθεία $\eta: y = \lambda x + \lambda - 8$ εφάπτεται στη C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = 0$ και $\lambda = 4$.

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η ευθεία $\zeta: y = \mu x + \mu - 3$ εφάπτεται στη C_f .

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $\epsilon: y = e^\xi x + \xi + 505$ να εφάπτεται στη C_f .

28. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - \ln x$ και $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g εφάπτονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής τους εφαπτομένης στο κοινό τους σημείο.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 + ax$ και $g(x) = x^2 + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η ευθεία με εξίσωση $y = 2x$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g .

α. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

β. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κι άλλη κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ. Να αποδείξετε ότι η C_g και η γραφική παράσταση της $h(x) = -e^x + 1$ έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

30. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + x - 1$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\epsilon: 2x - y + 1 = 0$.

31. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 1$

α. Να δείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το $D_{f^{-1}}$.

β. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο $x_0 = 1$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

32. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x+1)e^x$. Να δείξετε ότι υπάρχουν δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και το γινόμενο των κλίσεων αυτών είναι e^{-1} .

33. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = -e^{-x}$. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν μοναδική κοινή εφαπτομένη.

34. Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x + 2} = 3$. Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, 3)$ είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: x + y - 2 = 0$, να βρείτε τον τύπο της f .

ΚΟΠΗ-ΚΡΙΣ