

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 8

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια επιλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

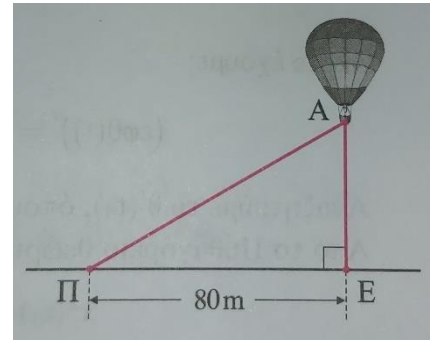
Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

A. Βασικές Ασκήσεις στον Ρυθμό Μεταβολής

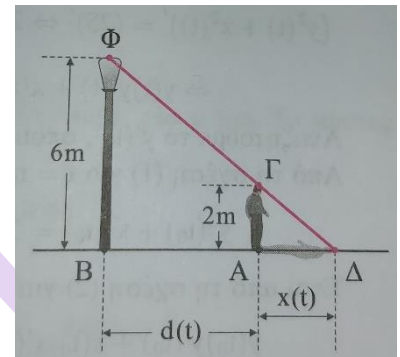
1. Ο όγκος ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi R^2 h$ όπου R η ακτίνα της βάσης και h το ύψος του κυλίνδρου.
 - α. Αν η ακτίνα R είναι σταθερή και ίση με 6 cm , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου V ως προς το ύψος.
 - β. Αν το ύψος h είναι σταθερό και ίσο με $\frac{4}{\pi}\text{ cm}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου V ως προς την ακτίνα R όταν:
 - i) η ακτίνα είναι 3 cm
 - ii) ο όγκος είναι 100 cm^3
 - γ. Αν ο όγκος V είναι σταθερός και ίσος με $144\pi\text{ cm}^3$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας R ως προς το ύψος h όταν:
 - i) το ύψος είναι 4 cm
 - ii) η ακτίνα είναι 2 cm
2. Ένα σώμα κινείται πάνω σε άξονα και η θέση του τη χρονική στιγμή t (σε sec) δίνεται από τον τύπο: $x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t + 5$, $t \in [0, 6]$. Να βρείτε:
 - α. την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή $t_1 = 5\text{ sec}$.
 - β. Την επιτάχυνση του σώματος τη χρονική στιγμή $t_2 = 4\text{ sec}$.
 - γ. ποιες χρονικές στιγμές είναι το σώμα στιγμιαία ακίνητο.
 - δ. ποια χρονικά διαστήματα το σώμα κινείται προς τη θετική φορά και ποια προς την αρνητική φορά.
 - ε. το συνολικό διάστημα που διήνυσε το σώμα.
3. Το μήκος x και το πλάτος y ενός ορθογωνίου μεταβάλλονται. Το μήκος x αυξάνεται με ρυθμό $3\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ και το πλάτος y ελαττώνεται με ρυθμό $2\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.
 - α. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της περιμέτρου του ορθογωνίου.
 - β. Κάποια χρονική στιγμή το μήκος του ορθογωνίου είναι 20 cm και το πλάτος του είναι 10 cm . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου αυτή τη χρονική στιγμή;
4. Το εμβαδόν E ενός τετραγώνου αυξάνει. Η πλευρά του a σε cm , που αυξάνει, δίνεται από τον τύπο $a = 3t + 2$, όπου t ο χρόνος σε sec .
 - α. Να αποδείξετε ότι $E = E(t) = (3t + 2)^2$.
 - β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του τετραγώνου, όταν $t = 2\text{ sec}$.
5. Δύο κινητά A και B ξεκινούν ταυτόχρονα από την αρχή των αξόνων O . Το A κινείται στον ημιάξονα Ox με ταχύτητα 6 cm/sec και το B στον ημιάξονα Oy με ταχύτητα 8 cm/sec .
 - α. Να βρείτε τις συναρτήσεις θέσεως των κινητών A και B .
 - β. Να βρείτε τη χρονική στιγμή που η απόσταση των A και B είναι 50 cm .
 - γ. Να αποδείξετε ότι η απόσταση $d = (AB)$ των δύο κινητών αυξάνεται με σταθερό ρυθμό τον οποίο και να προσδιορίσετε.

6. Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου και η βάση της έχει πλάτος 2 m και μήκος 3 m. Η δεξαμενή είναι γεμάτη με νερό και αδειάζει με ρυθμό 120 lit/sec. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο κατεβαίνει η στάθμη του νερού σε cm/sec.
7. Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$ ξεκινώντας από το O και η τετμημένη του x αυξάνεται με ρυθμό 4 cm/sec.
- α. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο $x(t) = 4t$.
- β. Να βρείτε το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να φθάσει στο σημείο A(4, 2).
- γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M καθώς περνάει από το σημείο B(16, 4).
8. Το εμβαδόν ενός τετραγώνου αυξάνεται με ρυθμό 24 cm²/sec τη χρονική στιγμή που η πλευρά του είναι 4 cm. Σε αυτή τη χρονική στιγμή να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου του τετραγώνου.
9. Έστω E το εμβαδόν του τριγώνου που περικλείεται από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \lambda$ με $\lambda > 0$.
- α. Να αποδείξετε ότι $E = \frac{1}{2} \lambda^2$
- β. Αν το λ αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E, όταν το $\lambda = 2$ cm.
10. Ένα κινητό σημείο M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^2$, $x \geq 0$ ξεκινώντας από την αρχή των αξόνων O.
- α. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 cm/sec, να βρείτε το χρόνο που θα χρειαστεί για να φτάσει στο σημείο B(4, 16).
- β. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M, είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του x , αν υποθεθεί ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$.
- γ. Καθώς περνάει το κινητό σημείο M από το σημείο A(2, 4), η τετμημένη του ελαττώνεται με ρυθμό 3 cm/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y τη χρονική στιγμή που περνάει από το A.
11. Ένα κινητό κινείται σε ελλειπτική τροχιά με εξίσωση $4x^2 + y^2 = 4$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$ η τετμημένη του x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες του δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.
12. Ένα κινητό M κινείται στην καμπύλη $C: y = e^x$. Καθώς το M περνάει από το σημείο A(0, 1), η τετμημένη του x αυξάνει με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης $l = (OM)$ τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το A.
13. Ένα κινητό M κινείται στην καμπύλη $C: y = x^3$. Καθώς το M περνάει από το σημείο A(1, 1), η τετμημένη x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = \widehat{MOx}$, τη χρονική στιγμή που το κινητό M περνάει από το A.
14. Ένα αερόστατο βρίσκεται στο έδαφος στη θέση E και απέχει 80 m από έναν παρατηρητή που βρίσκεται στη θέση Π. Το αερόστατο A ανεβαίνει με ρυθμό 50 m/min. Να βρείτε:
- α. τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΠΑ τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 60 m.

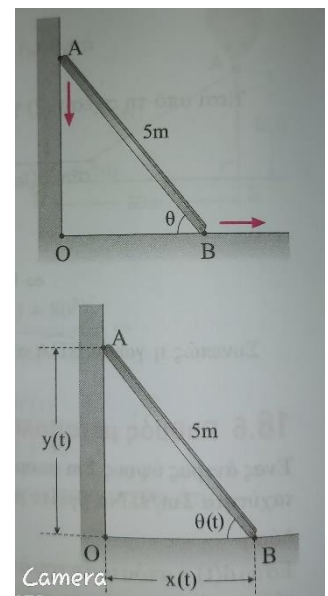
β. τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ΕΠΑ τη στιγμή που το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 60 m.



15. Ένας άντρας ύψους 2 m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 6 m με σταθερή ταχύτητα 2 m/sec. Να βρείτε με ποια ταχύτητα αυξάνεται το μήκος της σκιάς του άντρα.



16. Το ένα άκρο μιας σκάλας μήκους 5 m είναι τοποθετημένο σε κατακόρυφο τοίχο και το άλλο σε οριζόντιο επίπεδο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλιστράει στο δάπεδο με ταχύτητα 0,2 m/sec. Τη χρονική στιγμή που η κορυφή της σκάλας βρίσκεται σε ύψος 4 m να βρείτε:
- την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή της σκάλας.
 - τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας $\theta = ABO$.



17. Μια βιομηχανία κατασκευάζει x χιλιάδες τεμάχια ενός προϊόντος τον μήνα. Το κόστος παραγωγής των x χιλιάδων τεμαχίων είναι: $K(x) = 20x^2 + 100x + 200$ (σε χιλιάδες €), ενώ η τιμή πώλησης 1000 τεμαχίων του προϊόντος είναι: $T(x) = x^2 - 40x + 1000$ (σε χιλιάδες €) για $x > 0$. Να βρείτε:
- πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους είναι θετικός..
 - το μέσο κόστος, το οριακό κόστος και το οριακό κέδρος, όταν η βιομηχανία κατασκευάζει 10.000 τεμάχια προϊόντος τον μήνα.
18. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της παραβολής με εξίσωση $y = x^2 - 4x$ με $x \geq 0$.

α. Τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το σημείο $A(1, -3)$, η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο A.

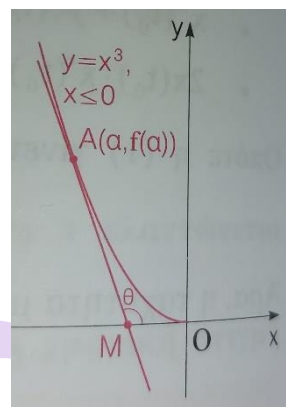
β. Αν υποθέσουμε ότι ισχύει $x'(t) > 0$ για κάθε $t \geq 0$, να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι διπλάσιος από τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης.

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$, $x \leq 0$

α. Να βρείτε την τετμημένη του σημείου τομής M της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A ($\alpha, f(\alpha)$), $\alpha \neq 0$ με τον άξονα x' .

β. Έστω ότι το σημείο A κινείται κατά μήκος της C_f και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του $\alpha(t)$ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου M του προηγούμενου ερωτήματος τη χρονική στιγμή που το A έχει τετμημένη -2.

γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο A με τον x' την ίδια χρονική στιγμή με το (α) ερώτημα.



B. Επιπρόσθετες Ασκήσεις στον Ρυθμό Μεταβολής

20. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A = 90^\circ$ και έστω AD το ύψος του. Η πλευρά β αυξάνεται με ρυθμό 1 cm/sec. Κάποια χρονική στιγμή η πλευρά β είναι 3 cm, η πλευρά γ είναι 4 cm και ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου είναι $\frac{13}{2} \text{ cm}^2/\text{sec}$. Αυτή τη χρονική στιγμή να βρείτε το

ρυθμό μεταβολής:

α. της πλευράς γ,

β. της πλευράς α,

γ. της ακτίνας του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABΓ,

δ. του τμήματος BD.

21. Η ακτίνα της βάσης ενός κυλίνδρου αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec και το ύψος του μειώνεται με ρυθμό 3 cm/sec. Τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της βάσης του είναι 3 cm και το ύψος του είναι 5 cm να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α. του όγκου του κυλίνδρου,

β. του εμβαδού της συνολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

22. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ, με $A = 90^\circ$, έχει σταθερή υποτείνουσα ΒΓ = 10 cm. Η πλευρά AB αυξάνεται με σταθερό ρυθμό 2 cm/sec. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία η πλευρά AB είναι 8 cm να βρείτε το ρυθμό μεταβολής:

α. της πλευράς ΑΓ,

β. του εμβαδού του τριγώνου ABΓ.

γ. της γωνίας ABΓ

23. Αν η επιφάνεια μιας σφαίρας ελαττώνεται με ρυθμό 4 cm²/sec, να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται ο όγκος αυτής, όταν $r = 10$ cm.

24. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 3}{\sqrt{x+1} - 2} = -4$.

α. Να αποδείξετε ότι η C_f έχει εφαπτομένη στο σημείο $\Sigma(3, f(3))$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β. Έστω ότι η παραπάνω εφαπτομένη τέμνει τους άξονες $y'y$ και $x'x$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Ένα σημείο M κινείται στο ευθύγραμμο τμήμα AB (ξεκινώντας από το A), ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται κατά 2 μονάδες/sec. Έστω επίσης K και Λ οι προβολές του σημείου M στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τετραπλεύρου OKML τη χρονική στιγμή που:

- i) το M ταυτίζεται με το σημείο Σ,
- ii) το OK είναι τετραπλάσιο του OL,
- iii) το OKML είναι τετράγωνο.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2 - 2x + \gamma}{4}$ με $x \in \mathbb{R}$. Η ευθεία $y = 4$ είναι εφαπτομένη της C_f .

α. Να αποδείξετε ότι $\gamma = 15$.

β. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από το σημείο $\Sigma(0, 6)$.

γ. Έστω οι ευθείες: $\epsilon_1: y = -2x + 6$ και $\epsilon_2: y = x + 6$. Θεωρούμε σημείο $M(\alpha, y_M)$ της ϵ_1 , με $0 < \alpha < 3$, και το σημείο N της ϵ_2 που έχει την ίδια τεταγμένη με το M. Έστω επίσης Λ και Κ οι προβολές των M και N αντίστοιχα στον άξονα $x'x$. Η περίμετρος του ορθογωνίου KLMN μεταβάλλεται με ρυθμό 4 μονάδες / sec.

- i). Να σχεδιάσετε τις ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 στο ίδιο σύστημα αξόνων.
- ii). Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M.
- iii). Τη χρονική στιγμή που η τετμημένη του M είναι 1 να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου KLMN.

26. Δίνεται ορθοκανονικό σύστημα Oxy και η συνάρτηση: $f(x) = 5x - e^x$. Έστω επίσης ε η εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από το σημείο $P(-1, -5)$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της ε.

β. Ένα σημείο M κινείται πάνω στην ευθεία ε και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες/sec. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της απόστασης OM, όταν το M βρίσκεται στον άξονα $y'y$.

γ. Δύο σημεία A και B κινούνται πάνω στην ευθεία ε έτσι, ώστε η τετμημένη του A να αυξάνεται με ρυθμό 3 μονάδες /sec, η τετμημένη του B να μειώνεται με ρυθμό 1 μονάδα/sec και η τετμημένη του A να είναι μεγαλύτερη από την τετμημένη του B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB.