

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9

ΚΑΝΟΝΕΣ de L' Hospital

Στο παρόν φυλλάδιο υπάρχει μια συλλογή ασκήσεων από δύο εξαιρετικά βιβλία:

1. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Γ1, Β. Παπαδάκης, έκδοση 2020, εκδόσεις Σαββάλας
2. Μαθηματικά Γ' Λυκείου, Α' τεύχος, Αν. Μπάρλας, έκδοση 2018, εκδόσεις Μπάρλας

Κώστας Χρυσανθόπουλος, 5^ο ΓΕΛ Ηλιούπολης

Ασκήσεις

A. Βασικές Ασκήσεις στους κανόνες De L' Hospital

1. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + x - 2}{x^2 - x}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sigma\upsilon\nu x}{\ln(x+1)}$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(x-1)}{x^3}$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{e^x}}$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 \ln x - x^2 + 1}{xe^x - 2e^x + e}$$

$$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 e^x - x^2}{\eta\mu x \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)}$$

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 4} - \sqrt{x + 3}}{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{2x + 2}}$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - 1}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sigma\upsilon\nu x}{x - \sigma\upsilon\nu x}$$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - e^x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - 1)$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 3^x}{x - \ln x}$$

$$\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2)$$

$$\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(e^x + x) - x)$$

$$\zeta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1 + e^x))$$

$$\eta. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\theta. \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)$$

$$\iota. \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln x)$$

$$\iota\alpha. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(xe^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\iota\beta. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{x^3}}$$

$$\iota\gamma. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$\iota\delta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\iota\epsilon. \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{\sigma\theta\rho x}$$

$$\iota\sigma\tau. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x}$$

$$\iota\zeta. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} \right)^x$$

$$\iota\eta. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x)^{\frac{1}{x}}$$

4. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} (\eta\mu x \cdot \ln x)$$

$$\beta. \lim_{x \rightarrow 0} \left[(e^x - 1) \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right]$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu x - 1)^3}{\eta\mu^4 x \cdot \ln(1 + x)}$$

5. Βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\alpha e^x + \beta \eta\mu x + \gamma x - 2\gamma}{x^2} = 1$.

6. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = f'(1) = 0$. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x + \ln x)}{x - 1}$.

7. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \quad \text{και} \quad f''(0) = 4. \quad \text{Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \qquad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf'(x) + f^2(x) + f(x)}{f(x)f'(x) + e^x - x - 1}$$

8. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη.

$$\alpha. \text{ Να αποδείξετε ότι: } f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

$$\beta. \text{ Αν επιπλέον για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει ότι: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{6h^2} = x + 2 \text{ και επίσης}$$

$$f(1) = f'(1) = 10, \text{ να βρείτε τον τύπο της } f.$$

9. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη με $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2$ και $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{μια συνάρτηση με } g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

α. Να βρείτε την $g'(0)$.

β. Να δείξετε ότι η g' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

10. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Να δείξετε ότι:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 3f(x) + 2f(x-h)}{h^2} = 3f''(x).$$

$$11. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{2\ln(x-1)}{x} + x + 5, & x > 2 \\ e^{2-x} + 3x, & x \leq 2 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2021$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-\infty, 0)$

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta\mu(2x)} = 0$

α. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

γ. Αν $h(x) = e^{-x} f(x)$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των C_f και C_h στα σημεία $A(0, f(0))$ και $B(0, h(0))$ είναι παράλληλες.