



Όρια συναρτήσεων

1

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x)^2}{x^2 + 4x + 4}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$

2

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{\sqrt{5x+1} - 4}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 11x + 18}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^4 - 1}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$

3

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{3x^2 + x - 4}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x|}{x - 2}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 2x - 8}{x^2 - 4}$

4

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|5-3x| - |3x-1|}{x^2 - 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-4| + 3|x| - 10}{x^2 - 9}$

5

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2\beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ x^2 + \beta x + 2\alpha, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η γραφική της παράστασης να διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$ και να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

6 Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-l}{f(x)+l} = 0$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

7 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x^2}.$$

8 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x} - 1}{\eta \mu^2 x}.$$

9 Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\eta \mu^2 x}.$$

10 Αν $f(x) = \frac{2x^3+ax+2\beta-10}{x^2-4}$, να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{19}{4}.$$

11 Εξετάστε αν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1 + |f(x)|} = \frac{3}{2}.$$

12 Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{1+|f(x)|} = \frac{l}{1+|l|}$.

13 Αν $f(x) = \frac{a|x+2|+\beta|x-4|-2}{x^2-5x+6}$, να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10.$$

14

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύει

$$f^2(x) + g^2(x) + 2f(x) - 4g(x) + 5 \leq x^2, \text{ για κάθε } x \in (-1,0) \cup (0,1),$$

να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

15

Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1+|f(x)|} = 0$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

16

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^6(x) + x^8}{f^4(x) + x^6}$$

17

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί τη σχέση

$$f^3(x) + 2f(x) + 4 = x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

18

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{x}{x-1}$

19

Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x), \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$, αν ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (f^2(x) + g^2(x)) = 0.$$

20

Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|\eta\mu x - xf(x)| \leq |x - \eta\mu x|.$$

21

Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 2\beta - 5}{x^2 - 1} = 4.$$

22

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ πληροί τη σχέση

$$|f(x) + 1| \leq \frac{|x|}{f^2(x) + |x| + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

23

Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$, αν ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (3f(x) - 2g(x)) = 7$$

και

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} (3g(x) + 7f(x)) = 1.$$

24

Έστω $M > 0$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $|g(x)| \leq M$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow \alpha} (f(x) - g(x))$.

25

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν τα ακόλουθα

$$f(x) \leq x < f(x) + 1 \text{ και } f(x) \in \mathbb{Z}.$$

Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x f\left(\frac{1}{x}\right)$

26

Δώστε παράδειγμα συναρτήσεων f, g που δεν έχουν όριο στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + g(x)) = 0$.

27

Δώστε παράδειγμα συναρτήσεων f, g που δεν έχουν όριο στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) \cdot g(x)) = 1$.

28

Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f , η οποία δεν έχει όριο στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} (xf(x)) = 0$.

29

Δώστε παράδειγμα συνάρτησης f , η οποία δεν έχει όριο στο 0 κι επίσης η συνάρτηση $g(x) = xf(x)$ δεν έχει όριο στο 0.

30

Εξετάστε αν είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ή $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα)

31

Εξετάστε αν είναι σωστός ο παρακάτω ισχυρισμός. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \cdot g(x) = 0$ και η συνάρτηση f έχει όριο στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. (απόδειξη ή αντιπαράδειγμα)