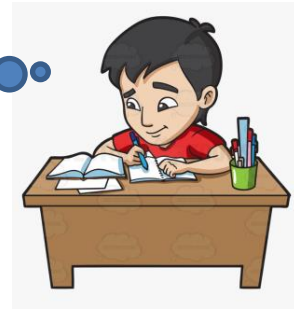


Μελετώ προσεκτικά τη θεωρία
του κεφαλαίου και σημειώνω στο
κουτάκι όσα έχω διαβάσει.



Κεφάλαιο 2

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ενότητες 2.1-2.3

- ☐ Ορισμός εφαπτομένης (σελ. 94)
- ☐ Ορισμοί παραγώγου συνάρτησης σε σημείο (σελ. 95)
- ☐ Ορισμός παραγωγίσιμης συνάρτησης: πότε μια συνάρτηση λέγεται παραγωγίσιμη στο x_0 -- τι πρέπει και αρκεί να ισχύει με τα πλευρικά όρια (σελ. 95)
- ☐ Σχόλιο για στιγμαία ταχύτητα (σελ. 96)
- ☐ Σχόλιο για συντελεστή διεύθυνσης εφαπτομένης (σελ. 96)
- ☐ Σύνδεση παραγώγου και συνέχειας (σελ. 99) + **Απόδειξη**
- ☐ Ορισμοί παραγωγίσιμης συνάρτησης: στο πεδίο οριμού, σε ανοικτό και σε κλειστό διάστημα (σελ. 104)
- ☐ Ορισμός πρώτης, δεύτερης, n -οστής παραγώγου (σελ. 104-105)
- ☐ Παράγωγος σταθερής συνάρτησης (σελ. 105) + **Απόδειξη**
- ☐ Παράγωγος ταυτοτικής συνάρτησης (σελ. 105) + **Απόδειξη**
- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^n$ όπου $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ (σελ. 105-106) + **Απόδειξη**
- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ (σελ. 106) + **Απόδειξη**
- ☐ Παράγωγοι των συναρτήσεων $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, e^x και $\ln x$ (σελ. 106-108) – χωρίς αποδείξεις
- ☐ Παράγωγος αθροίσματος συναρτήσεων (σελ. 111) + **Απόδειξη**
- ☐ Παράγωγος γινομένου και πηλίκου συναρτήσεων (σελ. 112-113) – χωρίς αποδείξεις

- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{-\nu}$, όπου $\nu \in \mathbb{N}^*$ (σελ. 113-114) + Απόδειξη
- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon\varphi x$ (σελ. 114) + Απόδειξη
- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sigma\varphi x$ (σελ. 114)
- ☐ Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης – Θεώρημα (σελ. 116)
- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^a$, $x \in (0, +\infty)$, όπου $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (σελ. 116) + Απόδειξη
- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, όπου $a > 0$ (σελ. 116-117) + Απόδειξη
- ☐ Παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. (σελ. 117) + Απόδειξη

Ενότητα 2.4

- ☐ Ορισμός ρυθμού μεταβολής (σελ. 123)
- ☐ Ορισμοί επιτάχυνσης – ταχύτητας ως ρυθμοί μεταβολής (σελ. 123)
- ☐ Ορισμός οριακού κόστους, οριακής είσπραξης, οριακού κέρδους (σελ. 123-124)

Ενότητες 2.5-2.10

- ☐ Θεώρημα Rolle (σελ. 128) + γεωμετρική ερμηνεία
- ☐ Θεώρημα Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού (σελ. 128) + γεωμετρική ερμηνεία
- ☐ Θεώρημα σταθερής συνάρτησης (σελ. 133) + Απόδειξη
- ☐ Πόρισμα συναρτήσεων με ίσες παραγώγους (σελ. 133) + Απόδειξη
- ☐ Σχόλιο για θεώρημα σταθερής συνάρτησης σελ. 134
- ☐ Θεώρημα για μονοτονία παραγωγίσιμης συνάρτησης (σελ. 135) + Απόδειξη
- ☐ Σχόλιο για το αντίστροφο του θεωρήματος (μονοτονία- f') (σελ. 136)
- ☐ Ορισμοί τοπικού μεγίστου, τοπικού ελαχίστου, τοπικού ακροτάτου (σελ. 141)
- ☐ Σχόλια για τοπικά ακρότατα (σελ. 142)
- ☐ Θεώρημα Fermat (σελ. 142) + Απόδειξη
- ☐ Πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων (σελ. 143)
- ☐ Ορισμός κρίσιμων σημείων (σελ. 143)
- ☐ Κριτήριο 1ης παραγώγου για τοπικά ακρότατα – Θεώρημα (σελ. 144-145) + Απόδειξη

- ☐ Εύρεση μεγίστης και ελάχιστης τιμής συνάρτησης συνεχούς σε κλειστό διάστημα (σελ. 146)
- ☐ Ορισμός κυρτής/κοίλης συνάρτησης (σελ. 155)
- ☐ Σχόλιο για εφαπτομένη και κυρτή/κοίλη συνάρτηση (σελ. 156)
- ☐ Θεώρημα για την κυρτότητα δύο φορές παραγωγίσιμης συνάρτησης (σελ. 156)
- ☐ Σχόλιο για το αντίστροφο του θεωρήματος (κυρτότητα- f'') (σελ. 156)
- ☐ Ορισμός σημείου καμπής (σελ. 157)
- ☐ Θεώρημα για σημεία καμπής και δεύτερη παράγωγο (αν ορίζεται) σελ. 157
- ☐ Πιθανές θέσεις σημείων καμπής (σελ. 157)
- ☐ Κριτήριο 2ης παραγώγου για σημεία καμπής (σελ. 158)
- ☐ Ορισμοί κατακόρυφης, οριζόντιας, πλάγιας ασύμπτωτης (σελ. 161-162)
- ☐ Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι μια ευθεία πλάγια/οριζόντια ασύμπτωτη της f – Θεώρημα σελ. 162
- ☐ Σχόλια για τις ασύμπτωτες πολυωνυμικών και ρητών συναρτήσεων (σελ. 163)
- ☐ Σχόλια για τα «σημεία» στα οποία αναζητούμε ασύμπτωτες (σελ. 163)
- ☐ Κανόνας de l' Hospital – Θεώρημα 1ο – Θεώρημα 2ο – Σχόλια (σελ. 165)
- ☐ Μελέτη και χάραξη συνάρτησης & σχόλιο (σελ. 169)



Ελέγχω ακόμη μία φορά ότι έχω μελετήσει τις απόδείξεις και συνεχίζω!!



Θεματα Πανελληνίων (2000-2022)



Σωστό – Λάθος

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$ τότε $f(0) \neq f(1)$.
2. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = \mathbb{R} - \{x | \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.
3. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
4. Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της C_f , του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.
5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $f(\alpha) \neq f(\beta)$.
6. Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\eta\nu x)' = \eta\mu x$.
8. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.
9. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ , τότε η παράγωγος της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ .
10. Για κάθε $x \in R_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\eta\nu x = 0\}$ ισχύει $(\varepsilon\varphi x)' = -\frac{1}{\sigma\eta\nu^2 x}$.

- ✓ Για «Σωστό» βρες την αντίστοιχη πρόταση στο βιβλίο.
- ✓ Για «Λάθος» σκέψου ένα αντιπαράδειγμα.

- 11.** Αν μία συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- 12.** Ισχύει ο τύπος $(3^x)' = x \cdot 3^{x-1}$.
- 13.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(x_0)$.
- 14.** Έστω μία συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- 15.** Αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο Δ βρίσκεται πάνω από τη γραφική της παράσταση.
- 16.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 σε ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει υποχρεωτικά τοπικό ακρότατο στο x_0 .
- 17.** Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 δεν έχουν ασύμπτωτες.
- 18.** Αν μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.
- 19.** Αν μία συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.
- 20.** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .
- 21.** Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) , αν $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.
- 22.** Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- 23.** Για κάθε συνάρτηση f , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f .
- 24.** $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.
- 25.** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $v \geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.
- 26.** Αν μία συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε δεν μπορεί να είναι συνεχής στο x_0 .
- 27.** Αν $f(x) = a^x, a > 0$ τότε ισχύει $(a^x)' = xa^{x-1}$.
- 28.** Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x | \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει
- 29.** $f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$
- 30.** Αν μία συνάρτηση f είναι κοίλη σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
- 31.** Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.
- 32.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 τότε η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$.
- 33.** Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος Δ , στα οποία η f δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγός της είναι ίση με το 0, λέγονται κρίσιμα σημεία της f στο διάστημα Δ .
- 34.** Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 . Αν η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντιστρόφως, τότε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .
- 35.** Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .

- 36.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και δεν είναι αντιστρέψιμη, τότε υπάρχει κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στο οποίο η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.
- 37.** Έστω συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο. Τότε πάντα ισχύει ότι $f'(x_0) = 0$.

Ορισμοί-διατυπώσεις

1. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat
2. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;
3. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f ;
4. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
5. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;
6. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;
7. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ ;
8. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;
9. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;
10. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

- 11.** Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
- 12.** Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να γραφεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.
- 13.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Ισχυρισμοί

1. Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$.
2. Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in A$, ισχύει ότι η f είναι σταθερή στο A .
3. Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
4. Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_0) = 0$, τότε το x_0 είναι θέση σημείου καμπής της f .
5. Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πολλαπλής επιλογής

- ❖ Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T . Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g .

