

Μελετώ προσεκτικά τη θεωρία
του κεφαλαίου και σημειώνω στο
κουτάκι όσα έχω διαβάσει.



Κεφάλαιο 3

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

- ☐ Ορισμός αρχικής συνάρτησης σελ.185 + σημείωση 1
- ☐ Θεώρημα σελ. 186 + **απόδειξη**
- ☐ Πίνακας παραγουσών βασικών συναρτήσεων (δες τετράδιο)
- ☐ Ιδιότητες παράγουσας αθροίσματος, γινομένου με αριθμού (δες τετράδιο)
- ☐ Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (σελ. 191-194/τετράδιο ή σελ. 218)
- ☐ Ολοκλήρωση με αντικατάσταση (σελ. 195/τετράδιο ή σελ.219)
- ☐ Ολοκλήρωση ρητής συνάρτησης (σελ.196-197/τετράδιο)
- ☐ Ορισμός ορισμένου ολοκληρώματος (σελ. 211-212)
- ☐ Ιδιότητες ορισμένου ολοκληρώματος - θεωρήματα 1,2,3 (σελ. 214)
- ☐ Θεώρημα για τη συνάρτηση $\int_a^x f(t) dt$ - μόνο τη διατύπωση (σελ. 216)
- ☐ Θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού (σελ. 216) + **απόδειξη**
- ☐ Εμβαδόν επίπεδου χωρίου (σελ. 224-228)



Ελέγχω ακόμη μία φορά ότι έχω
μελετήσει τις απόδείξεις και συνεχίζω!!

Θεματα Πανελληνίων (2000-2022)



- ✓ Για «Σωστό» βρες την αντίστοιχη πρόταση στο βιβλίο.
- ✓ Για «Λάθος» σκέψου ένα αντιπαράδειγμα.

Σωστό – Λάθος

1. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
2. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, αν G είναι μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε το $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\alpha) - G(\beta)$.
3. Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.
4. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$
5. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$
6. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(x) < 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = \alpha, x = \beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
7. Αν f μία συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.
8. Ισχύει η σχέση $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.
9. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = [x \cdot f(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} x f'(x) dx.$$

10. Έστω μία συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.

11. Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha, \beta]$.

12. Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

13. Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

14. Για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

$$\text{Αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

15. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

16. Αν f, g, g' συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x) dx.$$

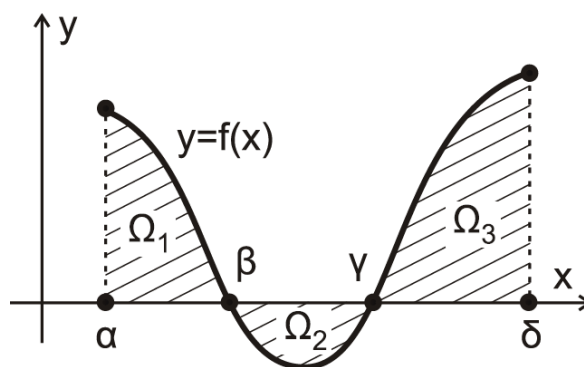
17. Αν η f είναι μία συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = - \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx.$$

Πολλαπλής επιλογής

❖ Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν για τα εμβαδά των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 ισχύει ότι $E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$ τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x) dx$ είναι ίσο με:

α. 6 β. -4 γ. 4 δ. 0 ε. 2



Ορισμοί-διατυπώσεις

1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;
2. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Συμπλήρωση κενων

- ❖ Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω σχέσεις ώστε να προκύψουν γνωστές ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος.

α. $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \dots\dots\dots$

β. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x)) dx = \dots\dots\dots$

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \dots\dots\dots$

όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$