



Παράγουσα συνάρτησης

1 Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(x) > 0$ και $f'(x) + 2xf(x) = 0$ για κάθε $x > 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$. Να δείξετε ότι η f' είναι συνεχής και να βρείτε τη συνάρτηση f .

2 Αν η συνάρτηση F είναι παράγουσα της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $F(x^2) = x\eta\mu(\pi x)$, να βρείτε την τιμή $f(4)$.

3 Έστω F παράγουσα της συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $F(0) = 0$ και $a > 0$ ώστε $a^x \geq 1 + F(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f(0) = \ln a$.

4 Να βρείτε τις παράγουσες των παρακάτω συναρτήσεων:

- | | | |
|-----------------------------------|---|--|
| i. $f(x) = e^{2x+3}$ | vi. $h(x) = \frac{1}{\sin^4 x}$ | xi. $g(x) = xe^{x^2+1}$ |
| ii. $g(x) = \eta\mu(4x - 1)$ | vii. $f(x) = \frac{1}{(x+1)x}$ | xii. $h(x) = \eta\mu x \sin x$ |
| iii. $h(x) = x \sin(x^2 + 3)$ | viii. $g(x) = \varepsilon\varphi^2 x$ | xiii. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ |
| iv. $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+7}$ | ix. $h(x) = \eta\mu^3 x \sin x$ | xiv. $g(x) = \varepsilon\varphi x$ |
| v. $g(x) = (1+x)e^x$ | x. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+7}}$ | xv. $h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ |

5 Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $g(x) = \frac{a \ln x + \beta}{x}$ να είναι παράγουσα της $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

6 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και F παράγουσα της f . Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = F(x - \alpha) - F(x - \beta), x \in \mathbb{R}.$$

- Να βρείτε την παράγωγο g' της g .
- Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $g'(x_0) = 0$ να δείξετε ότι $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

7

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- i. $I = \int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$
- ii. $I = \int_0^1 (e^x + 3x^2) dx$
- iii. $I = \int_0^\pi (\sin x - \eta \mu x) dx$
- iv. $I = \int_0^2 (x^2 + |x - 1|) dx$
- v. $I = \int_0^3 (|x^2 - 3x + 2|) dx$

8

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- i. $I = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$
- ii. $I = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\sin^2 x \eta \mu^2 x} \right) dx$
- iii. $I = \int_0^1 \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right) dx$
- iv. $I = \int_{-1}^1 (xe^x + e^x) dx$
- v. $I = \int_0^1 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) dx$

9

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

- i. $I = \int_1^e \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right) dx$
- ii. $I = \int_0^{\pi/4} (\varepsilon \varphi^2 x) dx$
- iii. $I = \int_0^{\pi/4} (\varepsilon \varphi x - \varepsilon \varphi^3 x) dx$
- iv. $I = \int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{\sin^4 x} \right) dx$
- v. $I = \int_1^2 \frac{x^4 + 2}{(x^5 + 10x)^5} dx$

10

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $I = \int_1^4 x(x^2 + 1)^4 dx$

ii. $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{x^2+1} dx$

iii. $I = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$

iv. $I = \int_0^2 x\sqrt{x^2+1} dx$

v. $I = \int_1^3 \frac{\ln x}{x} dx$

11

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $I = \int_{-1}^1 \frac{x}{(x^2+1)^3} dx$

ii. $I = \int_1^{\ln 5} (e^x \sqrt{e^x - 1}) dx$

iii. $I = \int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx$

iv. $I = \int_0^{\pi/4} \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu^5 x} dx$

v. $I = \int_2^3 \frac{1}{x \ln^2 x} dx$

12

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $I = \int_1^{\pi/2} x \sigma \upsilon \nu x dx$

ii. $I = \int_0^1 x^2 e^x dx$

iii. $I = \int_1^e x^2 \ln x dx$

iv. $I = \int_{1/e}^e |\ln x| dx$

v. $I = \int_1^e \ln^2 x dx$

13

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $I = \int_1^4 (x^2 + x) \ln x dx$

ii. $I = \int_{1/2}^1 (2x + 1) \ln 2x dx$

iii. $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} (x + 3) e^{2x} dx$

iv. $I = \int_0^{\pi/2} (x+1) \sin x \, dx$

v. $I = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \, dx$

14 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_1^4 \frac{2x+4}{x+2} \, dx$$

$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x(x+2)e^x \, dx$$

$$I_4 = \int_1^2 \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \, dx$$

15 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}\ln 2} \frac{e^x}{e^x + e^{-x}} \, dx$$

$$I_2 = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{e^x - e^{-x}} \, dx$$

$$I_3 = \int_0^2 (x+1)\sqrt{x^2+2x} \, dx$$

16 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_1^4 \frac{2x+3}{x+2} \, dx$$

$$I_2 = \int_0^1 x(x+1)e^x \, dx$$

$$I_3 = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{(1 - \sin^2 x)^2} \, dx$$

17 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x) = x + F(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου F είναι παράγουσα της συνάρτησης $y = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$ με $F(1) = 0$.

18 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 f(x) \, dx$ όταν:

i. $f(x) = |x|(2x^2 - 1)$

ii. $f(x) = \begin{cases} -2x^2 + 3, & x < 0 \\ e^x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

19

Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα $[0, \pi]$ και $f(\pi) = e^{-\pi}$. Αν ισχύει $\int_0^\pi (f(x) + f'(x))e^x dx = 2$ να βρεθεί η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο $x = 0$.

20

Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^1 xf'(x)dx = 1993 - \int_0^1 f(x)dx$. Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f για $x = 1$.

21

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_a^\beta f'(x)e^{f(x)}dx = 0 \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha < \beta.$$

Να αποδείξετε ότι $f(\alpha) = f(\beta)$ και ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

22

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x x \sin t dt$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $g''(x) = 2\sin x - x\cos x$, $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

23

Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι

$$\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(a + \beta - x)dx.$$

24

Έστω $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι

$$\int_a^{\pi/2} f(\eta\mu x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\sigma\upsilon\nu x)dx.$$

25Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f(x) + f(a + \beta - x) = c \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι

$$\int_a^\beta f(x) dx = f\left(\frac{a + \beta}{2}\right)(\beta - a) = \frac{f(a) + f(\beta)}{2}(\beta - a).$$

26

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} dx.$$

27

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx.$$

28

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1 + 2\eta\mu \frac{x}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{x}{2}} e^x dx.$$

29

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/4} x \varepsilon\varphi^2 x dx.$$

30

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/2} (\eta\mu x - x \sigma\upsilon\nu x) dx.$$

31 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 x \sqrt[5]{x-1} dx.$$

32 Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} e^{2x} dx.$$

Μονοτονία ολοκληρώματος

33 Να δείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_0^1 \frac{1}{e^{ax} + e^{-ax}} \leq \frac{1}{2}.$$

34 Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 t^n \sqrt{t+1} dt \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}.$$

35 Να αποδείξετε ότι

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-x^2} dx < 1.$$

36 Να αποδείξετε ότι:

- i. $e^{-x} + x \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. $\int_0^1 e^{-x^2} dx \geq \frac{2}{3}$

37 Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1} dt \leq \frac{1}{n+1}.$$

38 Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^1 2^{x^2} dx \geq 1 + \frac{\ln 2}{3}.$$

39 Να αποδείξετε ότι

$$\int_1^e \frac{\eta \mu x}{x} dx < \pi - e + 1.$$

Εμβαδά

40 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = 3 - x^2$ και $g(x) = x^2 + 1$.

41 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων της συνάρτησης $f(x) = 3 - x^2$ και της ευθείας $y = -x$.

42 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x) = \ln^2 x$ και $g(x) = \ln x$.

43 Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλύεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \varepsilon \varphi^4 x$ και των ευθειών $x = \pi/4$ και $x = \pi/3$.

44

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 0$ και $x = e$.

45

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{4}{x}, x > 0$.

- (i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$, όπου $\lambda > 0$ είναι

$$E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4 \ln \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right).$$

- (ii) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

46

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = (x + 2)e^{-x}, x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$.

47

Αν $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$, όπου $\lambda > 0$, τότε να βρεθεί το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E(\lambda)$.

48

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$.

- (i) Να βρείτε τα σημεία A, B στα οποία η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
- (ii) Να βρείτε το σημείο Γ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία ε .

- (iii) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλύεται μεταξύ της ευθείας ε και της παραβολής f ισούται με $\frac{4}{3}(AB\Gamma)$.

49

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλύεται μεταξύ της παραβολής $y^2 = 3x$ και της ευθείας $y = 3x$.

50

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλύεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ και των ευθειών $y = x$ και $x = 0$.

