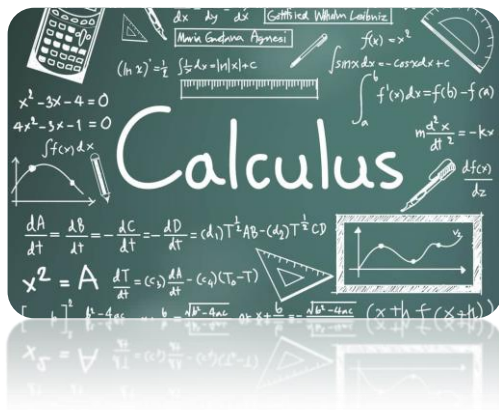


Θεώρημα Fermat



1

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 1$$

να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

2

Αν $-2 < \alpha < 2$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + ax + 2)e^x$ δεν έχει ακρότατα.

3

Έστω $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει $\alpha^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\alpha = e$.

4

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + \beta}{1}$$

να παρουσιάζει στη θέση 3 ακρότατο ίσο με -1 . Ποιο είναι το είδος του ακροτάτου;

5

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σε έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση

$$f(t) = \frac{at}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2}$$

όπου α, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

i) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α, β .

- ii) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

Θεώρημα Rolle

6

Αν $f(x) = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$, να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

7

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (a, β) με $f(\beta) = 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$. Να δείξετε ότι $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta)$.

8

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x - \frac{1}{2}\eta\mu x - \pi = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = \pi$.

9

Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x - xe^x - 1 = 0$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$.

10

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) και έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, να δείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\gamma) = 0$.

11

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{3}x^3 + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι πραγματικοί αριθμοί με $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

12

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

- (α) Είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (a, β) .
- (β) Ισχύει $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και $g'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$.
- (γ) $f(\beta)g(a) - f(a)g(\beta) = 0$

Να δείξετε ότι:

- i. Για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.
- ii. Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

13

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ για τις οποίες ισχύουν $f(0) = g(1) = 0$ και $f(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + \frac{g'(\xi)}{g(\xi)} = 0$.

14

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

- i. Να αποδειχθεί ότι για τη συνάρτηση $F(x) = \frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$, υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0) = 0$.
- ii. Αν $c \notin [\alpha, \beta]$ να αποδειχθεί ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση $y = f(x)$ διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$, $x \in \mathbb{R}$, όπου μ πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο ανοικτό διάστημα $(1,2)$.

16

Έστω f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο (α, β) για τις οποίες ισχύει $f(x)g'(x) - f'(x)g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Αποδείξτε ότι μεταξύ δύο ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$.

17

Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$.

18

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 + ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $a \neq 0$ και $3a^2 \leq 8\beta$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει όλες τις ρίζες της πραγματικές και άνισες.

19

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 3x) = f(5 - x)$.

20

Δείξτε ότι η εξίσωση $5x^4 - 4x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

21

Έστω $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{3} + \dots + \frac{\alpha_n}{n+1} = 0.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n = 0$ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

22

Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f^2(x)f(1-x)$. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε:

- i. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της συνάρτησης g στο σημείο x_0 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- ii. $2f'(x_0)f(1-x_0) = f(x_0)f'(1-x_0)$

23

(Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy) Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α, β) . Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)(g(\beta) - g(\alpha)) = g'(x_0)(f(\beta) - f(\alpha)).$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής (Lagrange)

24

Να δείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$$
25

Να δείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\left| \ln \frac{\alpha^2 + 1}{\beta^2 + 1} \right| \leq |\alpha - \beta|$$

26

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in [0, \pi]$ ισχύει
 $\eta\mu\alpha - \eta\mu\beta \leq (\alpha - \beta) \sigma\upsilon\nu\beta$.

27

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) τέτοια ώστε $|f'(x)| \leq M$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ όπου $M > 0$. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $|f(x_1) - f(x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$.

28

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} = e^{(\alpha-\beta)\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}}.$$

29

Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$ ισχύει $1 + x < e^x < ex + 1$.

30

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) τέτοια ώστε $f(\alpha) = f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε
 $f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

31

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (α, β) για την οποία υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x), \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)}{\alpha - \beta}.$$

32

Έστω f συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) . Να δείξετε ότι αν η γραφική παράσταση έχει τρία συνευθειακά σημεία, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(x_0) = 0$.

33

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) τέτοια ώστε $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι:

- i. Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .
ii. Υπάρχουν $x_1, x_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)f'(x_2) = 4$.

34

Να αποδείξετε την ανισότητα $e^e \cdot \pi^\pi > e^{2\pi}$.

35

Έστω συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[0,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ με $f(0) = 1$ και $1 \leq f'(x) \leq 4$ για κάθε $x \in (0,5)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0,5]$ ισχύει $x + 1 \leq f(x) \leq 4x + 1$.

36

Να αποδείξετε την ανισότητα

$$\sin \frac{5\pi}{18} < \frac{1}{2} + \frac{\pi\sqrt{3}}{36}.$$

37

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ ώστε $f(0) = f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2, x_3 \in (0,3)$ ώστε $f'(x_1) + f'(x_2) + f'(x_3) = 0$.

38

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ ώστε $f(0) = f(3)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,3)$ ώστε $2f'(x_1) + f'(x_2) = 0$.

39

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0,3]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ ώστε $f(0) = 0$ και $f(3) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,3)$ ώστε $2f'(x_1) + f'(x_2) = 1$.

40

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0,5]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,5)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,5)$ ώστε $3f'(x_1) + 2f'(x_2) = f(5) - f(0)$.

41

Έστω f συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ώστε $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0,1)$ ώστε

$$\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2.$$

42

Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) κι επιπλέον για κάθε $x \in (a, \beta)$ ισχύει $g'(x) \neq 0$. Να δείξετε ότι:

- i. Για κάθε $x \in [\alpha, \beta)$ ισχύει $g(x) \neq g(\beta)$.
- ii. Υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0) - f(a)}{g(\beta) - g(x_0)}.$$

Σταθερές συναρτήσεις

43

A. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη τέτοια ώστε $f(x) + f''(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = f'(0) = 0$. Να δείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση $h(x) = [f(x)]^2 + [f'(x)]^2$ είναι σταθερή.
- ii. Η συνάρτηση f είναι η μηδενική συνάρτηση.

B. Να δείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει:

- i. $\eta\mu(x+y) = \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu y + \eta\mu y \cdot \sigma\upsilon\nu x$
- ii. $\sigma\upsilon\nu(x+y) = \sigma\upsilon\nu x \cdot \sigma\upsilon\nu y - \eta\mu x \cdot \eta\mu y$

44

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0) = 1$ και επιπλέον για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot e^{\eta\mu x}$ είναι σταθερή και στη συνέχεια να βρείτε την f .

45

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x) = cf(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c πραγματική σταθερά. Να δείξετε ότι υπάρχει $A \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = Ae^{cx}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

46

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x) - x + 1)e^x$ είναι σταθερή.
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

47

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(x) - f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = (f(x) + x + 1)e^{-x}$ είναι σταθερή.
- ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

48

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $\alpha > 1$ ώστε να ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

49

Να βρείτε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)e^{f(x)} = 2x + 1$ και η γραφική της παράσταση στο σημείο $A(1, f(1))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $\frac{3}{5}$.

50

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $h(0) = 1$ και $2xh(x) = (x^2 + 1)(h(x) - h'(x)) + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

51

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν $f(0) = f'(0) = 1$ και $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η συνάρτηση f .

52

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f'(1) = 1$ και $(x + 1)f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

53

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 0$ και $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

54

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 1, f(x) \neq 0$ και $f'(x) = -4xf^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

55

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(1) = 1$ και $f'(x) - \frac{1}{x}f(x) = x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

56

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 2$ και $f'(x) - f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

57

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(x) > 0$ και $2xf(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

58

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(0) = 1$ και $f(x)f'(x) - f^2(x) = xe^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονοτονία – Ακρότατα συνάρτησης

59

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις παρακάτω συναρτήσεις:

- i. $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$
- ii. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$
- iii. $f(x) = x^2 e^{-x}$
- iv. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$
- v. $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$

60

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln^2 x$, $x > 0$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $\ln x \geq -\frac{2}{e\sqrt{x}}$.

61

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - e \ln x$, $x > 0$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς e^π και π^e .

62

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{x-1}$, $x \geq 1$, όπου $n \geq 2$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Αν $0 < \alpha < \beta$, να δείξετε ότι $\sqrt[n]{\beta} - \sqrt[n]{\alpha} < \sqrt[n]{\beta - \alpha}$.

63

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + 3\alpha x^2 + 6x - 2$ είναι γνησίως αύξουσα.

64

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 3$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μονδική πραγματική ρίζα.

65 Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$, έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

66 Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $x \in [0, 3]$.
i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

67 Αν $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ να δείξετε ότι $\frac{\varepsilon\varphi x}{x} < \frac{\varepsilon\varphi y}{y}$.

68 Να μελετήσετε τη συνάρτηση
$$f(x) = \frac{x^3}{9}(3 \ln x - 1) + x(1 - \ln x) + 1$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

69 Να μελετήσετε τη συνάρτηση
$$f(x) = (x - 2)^2 + 2(e^x + x)$$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

70 Έστω $0 < \alpha < 1$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει
$$(1 + x)^\alpha + (1 - x)^\alpha \leq 2.$$

71 Έστω $\alpha > 1$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-1, 1]$ ισχύει
$$(1 + x)^\alpha + (1 - x)^\alpha \geq 2.$$

72 Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει
$$\ln(x + 1) > \frac{2x}{2 + x}.$$

73 Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ισχύουν τα εξής:
i. $\varepsilon\varphi x - \frac{1}{3}\varepsilon\varphi^3 x < x$
ii. $x < \varepsilon\varphi x - \frac{1}{3}\varepsilon\varphi^3 x + \frac{1}{5}\varepsilon\varphi^5 x$

74

Να αποδείξετε τις ανισότητες:

- i. $\eta\mu x < 2x$ για κάθε $x > 0$
- ii. $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$ για κάθε $x > 0$

75

Να αποδείξετε ότι:

- i. $e^x - x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει μοναδική ρίζα τη $x = 0$.

76

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

77

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $2x - 2\sqrt{x} \geq \ln x$.

78

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $e^{f(x)} + f(x) = 3x^5 + 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

79

Να βρεθεί το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0$.

80

Να βρεθούν οι τιμές του $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2x^5 + 5ax^4 + 10x^3$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Κανόνας de l' Hospital

81

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x + \frac{x^3}{6}}{x^3}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x$.

82

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

83

Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$.

84 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \varepsilon \varphi x$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varepsilon \varphi x \ln x$.

85 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

86 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^{-x})^x}{x}$.

87 Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x^2 \eta \mu \frac{1}{x} - x\right)$.

88 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \eta \mu x)^{\frac{1}{x}}$.

89 Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\eta \mu^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$.

Κυρτές και κοίλες συναρτήσεις

90 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της συνάρτησης.

91 Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$ είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής της συνάρτησης.

92 Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Αν ισχύει $f(x)f''(x) > (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \Delta$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα Δ .

- 93** Δίνεται ο θετικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2x \ln x, x > 0$.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
 - Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- 94** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)^7(x - 5)^9$. Να δείξετε ότι:
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{7}{x-2} + \frac{9}{x-5}$ για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq 5$.
 - Η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $(2, 5)$.

- 95** Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ παραγωγίσιμη στο (α, β) στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $f(x) > 0$.

- 96** Έστω f συνάρτηση κυρτή στο διάστημα Δ . Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

- 97** Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2ax^3}{3} + \left(a^2 - 2a + \frac{5}{2}\right)x^2 + (a^3 + 7)x - 5a^2.$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

- 98** Έστω $\alpha > 0$. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\ln x - \ln a}{x - a}, x > a.$$