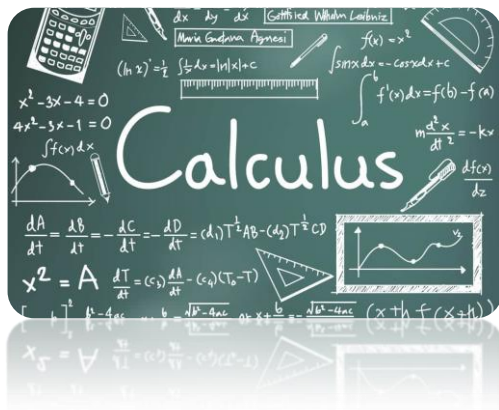


Παράγωγος συνάρτησης



1

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 , να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu(x - x_0)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

2

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$. Εξετάστε αν η συνάρτηση $g(x) = |x - x_0| \cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

3

Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)| \leq 3x^2$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την παράγωγο $f'(0)$.

4

Να εξετάσετε αν υπάρχει η παράγωγος στο 0 της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

5

Έστω f, g συναρτήσεις με $|f(x)| \leq 2g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $g(1) = 0$ και $g'(1) = 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

6

Έστω f συνάρτηση τέτοια ώστε $x^3 \leq f(x) \leq x^3 + x^2$ για κάθε $x \in (-1, 1)$. Εξετάστε αν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

7

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 . Να δείξετε ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h} = 2f'(x_0)$$

Εξετάστε αν η ύπαρξη του ορίου

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$$

στο $\mathbb{R}$ συνεπάγεται την ύπαρξη παραγώγου της f στο x_0 .

8

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0 με $f(x_0) = f'(x_0) = 2$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(x_0 + 3h) - f^2(x_0 + h)}{h}$$

9

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη x_0 στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $f(x) = x^2 - 7x + 3, \quad x_0 = 2$

ii. $f(x) = \sqrt{x - 4}, \quad x_0 = 8$

iii. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 7, \quad x_0 = 2$

iv. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2, \quad x_0 = 1$

10

Να βρείτε τις εφαπτομένες της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 7x + 9$ οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

11

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

12

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1}}, \quad x \in \mathbb{R}$.

ii. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad x \in \mathbb{R}$.

iii. $f(x) = x^x, \quad x > 0$

13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη

γραφική παράσταση C_f της f και η εφαπτομένη στο παραπάνω σημείο να έχει συντελεστή διεύθυνσης -3 .

14

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 . Να αποδείξετε ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0f'(x_0)$$

15

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .
- Υπάρχει συνάρτηση $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 η οποία για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{x_0\}$ πληροί τη σχέση $f(x) - f(x_0) = \varphi(x)(x - x_0)$.

16

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 με $f(x_0) \neq 0$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $|f|$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

17

Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = 1$ και $f(x_0) = 2$. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^5(x_0 + 3h) - f^5(x_0 + h)}{h}$$

18

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 1 τέτοια ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1 + 5h) - f(1 - h)}{h} = 0.$$

Να δείξετε ότι $f'(1) = 0$.

19

Έστω $\alpha > 1$ και $\delta > 0$. Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$, τότε να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να υπολογίσετε την παράγωγο.

20

Να βρείτε τις τιμές των $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \leq 1 \\ 2x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο 1.

21

Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0 με $g(0) = g'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο 0.

22

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + e^{3x}$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = 0$.

23

Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού τέτοιο ώστε $f(0) = 4$, $f(-1) = 2$, $f''(2) = 4$ και $f^{(3)}(1) = 6$.

24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\mu x}$. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

25

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

- i. $f(x) = x^2 - 7x + 3$, $x_0 = 1$
- ii. $f(x) = \sqrt{x-4}$, $x_0 = 8$
- iii. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$
- iv. $f(x) = 4 \cdot \eta \mu(6x)$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$

26

Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 3x + 5$, στα οποία η εφαπτομένη είναι:

- i. παράλληλη στην ευθεία $y = 9x + 14$
- ii. κάθετη στην ευθεία $y = -x + 5$

27

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 3x + 5$, στα οποία η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

28

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $y = \frac{5x}{x+1}$ στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 5x + 3$.

29

Βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$y = \frac{x^2}{2} - 5x + 8, \text{ στα οποία η εφαπτομένη σχηματίζει με τον άξονα } x'x \text{ γωνία } \frac{3\pi}{4}.$$

30

Έστω $f(x) = \alpha x^2 + \beta x$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1, 4)$ να έχει κλίση ίση με 7.

31

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x - 3$.

- Να βρείτε τις παραγώγους f', f'' .
- Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

32

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 3$.

- Να βρείτε τις παραγώγους f', f'' .
- Να βρείτε τις εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

33

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax + \beta$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τους $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = 3x - 1$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2.

34

Εξετάστε αν η ευθεία $y = 3x - 2$ εφάπτεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

35

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου a ώστε η ευθεία $y = ax - 16$ να εφάπτεται με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$.

36

Έστω f, g παραγωγίσιμες στο 0 με $f(0) = g(0) = 0$. Εξετάστε αν είναι δυνατόν να ισχύει η ισότητα $x = f(x)g(x)$ για κάθε $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, όπου ε θετικός αριθμός.

37

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = a_1 \eta \mu x + a_2 \eta \mu(2x) + \dots + a_n \eta \mu(nx)$ για την οποία ισχύει $|f(x)| \leq |\eta \mu x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι

$$|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1.$$
38

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 4x + 5$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(2, -3)$.

39

Δώστε παράδειγμα συνάρτησης η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, ενώ η απόλυτη τιμή της είναι παραγωγίσιμη στο 0.

40

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο x_0 , τέτοια ώστε η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

41

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 με $f(x_0) = 0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = |f(x)|$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνον αν $f'(x_0) = 0$.

42

Έστω $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $g(-1) = 7$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3(x-2)^2 g(2x-5)$. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

43

(i) Έστω $f(x)$ πολυώνυμο βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2. Να δείξετε ότι το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $f(x)$ αν και μόνον αν

$$f(\rho) = f'(\rho) = 0.$$

(ii) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β ώστε το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - (a-\beta)x^3 + 2ax^2 - 5x + 4$$

να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

44

Να δείξετε ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5$$

δεν έχει παράγοντα της μορφής $(x-\rho)^2$.

