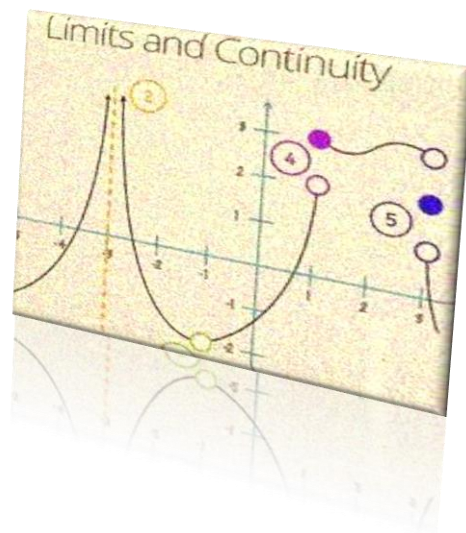


Συνέχεια συναρτήσεων



- 1 Εξετάστε ως προς τη συνέχεια στο 0 τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- 2 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 2x + \alpha, & x > 0 \end{cases}$$

- 3 Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε να είναι συνεχής η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \alpha, & x = 2 \end{cases}$$

- 4 Έστω f συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x)| \leq x^2$ για κάθε $x \in (-1, 1)$.
Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

- 5 Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- 6 Έστω f, g συναρτήσεις με $|f(x)| \leq |g(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει $g(1) = 0$ και η g είναι συνεχής στο 1, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

7

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$xf(x) + 3 = f(x) + \sqrt{8x^2 + 1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(1)$.

8

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο 0 με $xf(x) + |\eta\mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

9

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε $1 \leq x^2 f(x)$ για κάθε $x \neq 0$. Να δείξετε ότι η f δεν είναι συνεχής στο 0.

10

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο x_0 , τέτοια ώστε $(x - x_0)f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(x_0)$.

11

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο 0, τέτοια ώστε

$$f(x + y) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu y + f(y) \cdot \sigma\upsilon\nu x, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

12

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε

$$f^5(x) + f(x) = x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι:

- i. $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. Η f είναι συνεχής στο 0.

13

Έστω f, g, h συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον $f(a) = h(a)$ και οι συναρτήσεις f, h είναι συνεχείς στο a . Να δείξετε ότι η g είναι συνεχής στο a .

14

Έστω f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f^2(x) + g^2(x) \leq x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο 0.