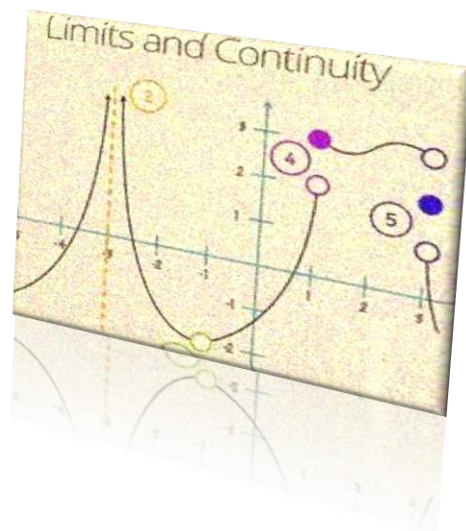


Συνέχεια σε κλειστό διάστημα



- 1 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(0) = 1$ και $f(1) = \frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.
- 2 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.
i. $x^6 - x^3 - 3x^2 + x - 5 = 0$ ii. $x^2 = x \cdot \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$
- 3 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ με $0 \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.
- 4 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, e]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1, e]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi \ln \xi = \xi$.
- 5 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ με $f(0) > 1$ και $f(1) < \frac{1}{2}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi + 1$.
- 6 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \leq \alpha$ και $f(\beta) \geq \beta$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$.
- 7 Εξετάστε αν υπάρχει πραγματικός αριθμός, ο οποίος είναι κατά μία μονάδα μικρότερος από τον κύβο του.
- 8 Έστω β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$ και $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει
$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

9

Έστω $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = f(x_0 + 1)$.

10

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 2$ και $f(x) < 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| > 3$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f λαμβάνει μέγιστη τιμή.

11

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x - 3 = 0$, έχει μοναδική πραγματική ρίζα η οποία ανήκει στο $(2,3)$.

12

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο.

13

Να δείξετε ότι η εξίσωση $3x^6 - 4x^5 + 2x^4 = x^3 + x - 1$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

14

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(\alpha) = 0$ και $f(\beta) = 1$. Εξετάστε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι αληθείς, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

- i) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii) Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,1]$.
- iii) Υπάρχει $x \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x) = \frac{1}{2}$.

15

Έστω $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(4)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν $x, y \in [0,4]$ τέτοιοι ώστε $|x - y| = 2$ και $f(x) = f(y)$.

16

Έστω I διάστημα πραγματικών αριθμών και $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \neq c$ για κάθε $x \in I$. Δείξτε ότι $f(x) < c$ για κάθε $x \in I$ ή $f(x) > c$ για κάθε $x \in I$.

17 Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in [a, \beta]$ υπάρχει $y \in [a, \beta]$ τέτοιο ώστε $|f(y)| \leq \frac{|f(x)|}{2}$. Δείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[a, \beta]$.

18 Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να δείξετε ότι για κάθε $s, t \in [a, \beta]$ ισχύει $f(s)f(t) > 0$.

19 Έστω $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια με $f([0, 1]) = [0, 4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi^2 + 1$.

20 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$ με $f(a) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2a$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) .

21 Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) - g(x) = cx$, όπου c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ετερόσημες ρίζες τότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

22 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, η οποία λαμβάνει μόνο ακέραιες τιμές, δηλαδή $f(x) \in \mathbb{Z}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

23 Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\theta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \geq \theta$ για κάθε $x \in [a, \beta]$.

24 Έστω f συνάρτηση συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, 4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 4)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4)}{5}$$

25 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 2$ και $f(x) > 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x| > 3$. Δείξτε ότι η συνάρτηση f λαμβάνει ελάχιστη τιμή.

26 Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια με $f([0,1]) = [1,3]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi^2 + \xi + 1$.

27 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ και $x_1, x_2 \in [0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει x_0 τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + 3f(x_2)}{4}$$

28 Έστω $f: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1.$$

Να δείξετε ότι για κάθε $a \in (-1,1)$ υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = a$.

29 Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια με $f([0,1]) = [0,1]$ και $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $g([0,1]) \subseteq [0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

30 Έστω $f, g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες έχουν την ίδια μέγιστη τιμή. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

31 Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια με $f([0,1]) = [0,3]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $y \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(y) = 2y^2 - y + 1$.

32 Έστω $f: [2,3] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(2) = \alpha$ και $f(3) = \beta$. Αν ισχύουν $\alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha > 0$ και $\alpha > \beta$, να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

33 Εξετάστε αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f([0,1]) = [0,1]$.

34 Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία πληροί τη σχέση $f^2(x) = x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = -1$.

35 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $f(\xi) = \xi$.

36 Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $|f(x)| = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

37 Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in [\alpha, \beta]$ υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

38 Έστω $f: [0,4] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(4)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0,4]$ ώστε $f(\xi + 1) = f(\xi)$.

39 Έστω $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν f^2 είναι σταθερή, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.

40 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(0) = 0$ και $f(1) = 3$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - 3f(x) + 2 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον πραγματικές ρίζες.

41 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi = 0$.

42 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής για την οποία ισχύει

$$f(3) + f(4) < 2 < f(1) + f(6).$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta = 7$ και $f(\alpha) + f(\beta) = 2$.

43 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}$ ώστε $(f \circ f)(\xi) = \xi$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = x_0$.

44 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^2(x) + 2xf(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

45 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0) = 3$ και $f^2(x) - 2xf(x) = 9$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την f .

46 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής η οποία πληροί τη σχέση $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να βρείτε την f .

47 Να δείξετε ότι κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

48 Έστω $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση και για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύουν τα εξής:

i. $f(x) \geq 0$

ii. $f(x) \neq x$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

49 Έστω $f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις τέτοιες ώστε:

i. Η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $0 \leq f(x) \leq 1$ και $0 \leq g(x) \leq 1$.

iii. $f \circ g = g \circ f$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0) = x_0$.

50 Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση τέτοια ώστε $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)}$$

51 Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ και $a_1, a_2, \dots, a_n \in [0, 1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x \in [0, 1]$ τέτοιο ώστε

$$|x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n| = \frac{n}{2}$$