

Διαμορφωτική αξιολόγηση στα Μαθηματικά

Συναρτήσεις

Μάθημα: Μαθηματικά Ο.Π.

Διάρκεια: 30 λεπτά

Τάξη: Γ'

Τμήμα: ΓΟΠ2

Οκτώβριος 2022

Ονοματεπώνυμο:

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα:

Έστω f, g συναρτήσεις με $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ και $g(x) = x^3 + 2e^x - 5$

A) Να δείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $(-1,1)$.

B) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1 – 1 και να βρείτε την αντίστροφή της.

Γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως μονότονη.

Δ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ και να δείξετε ότι η $g \circ f$ είναι αντιστρέψιμη.

Απάντηση:

A) Για να ορίζεται η f πρέπει $1 - x \neq 0$ και $\frac{1+x}{1-x} > 0$. Ισοδύναμα

$$x \neq 1 \text{ και } (1+x)(1-x) > 0$$

Ο πίνακας προσήμου του γινομένου $(1+x)(1-x)$ έχει ως εξής:

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1+x$	$-$	$\emptyset$	$+$	$+$
$1-x$	$-$	$-$	$\emptyset$	$+$
$(1+x)(1-x)$	$-$	$\emptyset$	$+$	$-$

Άρα $D_f = (-1,1)$.

B) Έστω $x_1, x_2 \in (-1,1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 f(x_1) &= f(x_2) \Rightarrow \\
 \ln\left(\frac{1+x_1}{1-x_1}\right) &= \ln\left(\frac{1+x_2}{1-x_2}\right) \xrightarrow{\ln \text{ 1-1}} \\
 \frac{1+x_1}{1-x_1} &= \frac{1+x_2}{1-x_2} \Rightarrow \\
 (1+x_1)(1-x_2) &= (1+x_2)(1-x_1) \Rightarrow \\
 \cancel{1} + x_1 - x_2 - \cancel{x_1}x_2 &= \cancel{1} + x_2 - x_1 - \cancel{x_1}x_2 \Rightarrow \\
 2x_1 &= 2x_2 \Rightarrow \\
 x_1 &= x_2
 \end{aligned}$$

Άρα η f είναι 1-1 και συνεπώς αντιστρέψιμη.

Για να βρούμε την αντίστροφη θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x .

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
 y &= f(x) \Leftrightarrow \\
 y &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \Leftrightarrow \\
 e^y &= \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow \\
 e^y(1-x) &= 1+x \Leftrightarrow \\
 e^y - e^yx &= 1+x \Leftrightarrow \\
 (1+e^y)x &= e^y - 1 \Leftrightarrow \\
 x &= \frac{e^y - 1}{e^y + 1}
 \end{aligned}$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\frac{e^y-1}{e^y+1} \in (-1,1)$, άρα το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

Οπότε $f^{-1}(y) = \frac{e^y-1}{e^y+1}$ για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Ισοδύναμα

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Γ) $g(x) = x^3 + 2e^x - 5, \quad D_g = \mathbb{R}$

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$.

Έχουμε $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$ (1) και $x_1 < x_2 \xrightarrow{e^x} e^{x_1} < e^{x_2}$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2) και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x_1^3 + e^{x_1} &< x_2^3 + e^{x_2} \Rightarrow \\ x_1^3 + e^{x_1} - 5 &< x_2^3 + e^{x_2} - 5 \Rightarrow \\ g(x_1) &< g(x_2) \end{aligned}$$

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\Delta) D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g\} \Rightarrow$$

$$D_{g \circ f} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \in (-1,1) \text{ και } \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow$$

$$D_{g \circ f} = (-1,1)$$

Έστω $x_1, x_2 \in (-1,1)$ με $g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2)$.

Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και 1-1.

Οπότε έχουμε:

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \xrightarrow{g^{-1}} f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{f^{-1}} x_1 = x_2$$

Άρα η $g \circ f$ είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της και συνεπώς αντιστρέψιμη.