

Διαμορφωτική αξιολόγηση στα Μαθηματικά

Όρια συναρτήσεων

Μάθημα: Μαθηματικά Ο.Π.

Διάρκεια: 20 λεπτά

Τάξη: Γ'

Τμήμα: ΓΟΠ2

Νοέμβριος 2022

Ονοματεπώνυμο:

ΛΥΣΕΙΣ

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - x - 1}{x - 2}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - \sqrt{4x + 21}}{1 - x^3}$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|5 - 4x| - |2x - 1|}{x^2 - 4}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2(3x)}{9x^2}$

6. $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)^2 \cdot \sin \frac{x+2}{x-2}$

Απάντηση:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - x - 1}{x - 2} = \frac{1^4 + 2 \cdot 1^3 - 1 - 1}{1 - 2} = -1$

Όριο ρητής συνάρτησης το οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε με απλή αντικατάσταση.

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 2x} =$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 4)}{x(x - 2)} =$
 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 4}{x} =$
 $= \frac{2 - 4}{2} = -1$

Όριο ρητής συνάρτησης στο οποίο αν αντικαταστήσουμε καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και παραγοντοποιούμε αριθμητή και παρονομαστή με στόχο να απαλείψουμε τους κοινούς όρους που μηδενίζουν τον αριθμητή και τον παρονομαστή ταυτόχρονα.

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - \sqrt{4x+21}}{1-x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(5 - \sqrt{4x+21})(5 + \sqrt{4x+21})}{(1-x^3)(5 + \sqrt{4x+21})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5^2 - \sqrt{4x+21}^2}{(1-x^3)(5 + \sqrt{4x+21})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{25 - (4x+21)}{(1-x^3)(5 + \sqrt{4x+21})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 4x}{(1-x^3)(5 + \sqrt{4x+21})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(1-x)}{(1-x)(1^2 + x + x^2)(5 + \sqrt{4x+21})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{(1+x+x^2)(5 + \sqrt{4x+21})} =$$

$$\frac{4}{(1+1+1^2)(5 + \sqrt{4 \cdot 1 + 21})} =$$

$$\frac{4}{3 \cdot 10} = \frac{2}{15}$$

Όριο συνάρτησης με ριζικά

στο οποίο αν

αντικαταστήσουμε

καταλήγουμε σε

απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με

τη συζυγή παράσταση του

αριθμητή κάνουμε πράξεις

μέχρι να μην έχουμε

παραστάσεις με ριζικά οι

οποίες να μηδενίζονται όταν

αντικαθιστούμε. Στη

συνέχεια παραγοντοποιούμε

τα πολυώνυμα σε αριθμητή

και παρονομαστή με στόχο

να απαλείψουμε τους

κοινούς όρους που

μηδενίζουν τον αριθμητή και

τον παρονομαστή

ταυτόχρονα.

4. Παρατηρούμε ότι κοντά στο 2, έχουμε $|5 - 4x| < 0$ και $|2x - 1| > 0$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|5-4x| - |2x-1|}{x^2-4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(5-4x) - (2x-1)}{x^2-4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5+4x-2x+1}{x^2-4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{x^2-4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x+2} =$$

$$\frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

Όριο συνάρτησης με

απόλυτες τιμές στο οποίο αν

αντικαταστήσουμε

καταλήγουμε σε

απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Υπολογίζουμε το πρόσημο

των παραστάσεων μέσα στις

απόλυτες τιμές κοντά στο x_0 .

και βγάζουμε τις απόλυτες

τιμές παίρνοντας υπόψη τα

πρόσημα που βρήκαμε.

Έπειτα συνεχίζουμε όπως

στο 2°.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin^2(3x)}{9x^2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2(3x)}{(3x)^2} \stackrel{u=3x}{=} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 u}{(u)^2} =$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu u}{u} \right)^2 =$$

$$= \left(\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} \right)^2 =$$

$$1^2 = 1$$

Τριγωνομετρικό όριο το οποίο υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας:

- Την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \omega + \eta\mu^2 \omega = 1$
- Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$ που γνωρίζουμε από τη θεωρία.
- Ιδιότητες ορίων

6. Παρατηρούμε ότι

Τριγωνομετρικό όριο το οποίο υπολογίζουμε με τη βοήθεια του κριτηρίου παρεμβολής.

$$\left| (x-2)^2 \cdot \sin \frac{x+2}{x-2} \right| \leq |(x-2)^2| \Leftrightarrow$$

$$-(x-2)^2 \leq (x-2)^2 \cdot \sin \frac{x+2}{x-2} \leq (x-2)^2 \quad (1)$$

κι επιπλέον $\lim_{x \rightarrow 2} [-(x-2)^2] = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 = 0$

Συνεπώς από τη σχέση (1) και το κριτήριο παρεμβολής έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2)^2 \cdot \sin \frac{x+2}{x-2} = 0$$