

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- Το γινόμενο $\overbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ παράγοντες}}$ (είτε ο a είναι θετικός είτε αρνητικός ρητός), συμβολίζεται με το a^n και λέγεται δύναμη με βάση το a και εκθέτη το φυσικό $n > 1$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ παράγοντες}}$$

εκθέτης

βάση

- Για $n = 1$, γράφουμε $a^1 = a$
- Η δύναμη a^n διαβάζεται και νιοστή δύναμη του a .
- Η δύναμη a^2 λέγεται και τετράγωνο του a ή a στο τετράγωνο.
- Η δύναμη a^3 λέγεται κύβος του a ή a στον κύβο.

Πρόσημο δύναμης

Παρατηρούμε ότι:

$$(+2)^5 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = +32 > 0$$

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{άρτιο πλήθος}} = +16 > 0$$

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)}_{\text{περιττό πλήθος}} = -32 < 0$$

Εικόνα

Γενικά ισχύει ότι:

- ▶ Δύναμη με βάση θετικό αριθμό είναι θετικός αριθμός.
Αν $a > 0$, τότε $a^n > 0$
- ▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη άρτιο είναι θετικός αριθμός.
Αν $a < 0$ και n άρτιος, τότε $a^n > 0$
- ▶ Δύναμη με βάση αρνητικό αριθμό και εκθέτη περιττό είναι αρνητικός αριθμός.
Αν $a < 0$ και n περιττός, τότε $a^n < 0$

Ιδιότητες δυνάμεων ρητών με εκθέτη φυσικό

Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} (-3)^3(-3)^5 &= \underbrace{(-3)(-3)(-3)}_{3 \text{ παράγοντες}} \underbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)}_{5 \text{ παράγοντες}} \\ &= \underbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3)}_{8 \text{ παράγοντες}} \\ &= (-3)^8 = (-3)^{3+5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7^6 : 7^3 &= \frac{7^6}{7^3} = \frac{7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7}{7 \cdot 7 \cdot 7} = \\ &= 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4 = 7^{6-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 \cdot 7)^6 &= (2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7)(2 \cdot 7) \\ &= (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = \\ &= 2^6 \cdot 7^6 \end{aligned}$$

Γενικά ισχύει ότι:

- ▶ Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

- ▶ Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

- ▶ Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{2}{9}\right)^5 = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9} = \frac{2^5}{9^5}$$

$$(8^3)^7 = 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 \cdot 8^3 =$$

$$= 8^{3+3+3+3+3+3+3} =$$

$$= 8^{7 \cdot 3} = 8^{21}$$

- Για να υψώσουμε ένα πηλίκιο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκιου στον εκθέτη αυτό.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^v = \frac{a^v}{b^v}$$

- Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

$$(a^u)^v = a^{u \cdot v}$$

- Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός με εκθέτη το μηδέν είναι ίση με μονάδα.

$$a^0 = 1$$

Επίσης, θα είναι:

$$\frac{5^7}{5^7} = 5^{7-7} = 5^{-1}, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και } \frac{5^7}{5^7} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5}, \text{ άρα } 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{5^6}{5^8} = 5^{6-8} = 5^{-2}, \text{ γνωρίζουμε ότι είναι και } \frac{5^6}{5^8} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{1}{5^2}, \text{ άρα } 5^{-2} = \frac{1}{5^2}$$

- Η δύναμη κάθε αριθμού, διάφορου του μηδενός, με εκθέτη αρνητικό είναι ίση με κλάσμα που έχει αριθμητή τη μονάδα και παρονομαστή τη δύναμη του αριθμού αυτού με αντίθετο εκθέτη.

Επειδή τα $\frac{a}{b}$ και $\frac{b}{a}$ είναι αντίστροφοι αριθμοί, όπως και τα a και $\frac{1}{a}$ στην προηγούμενη σχέση, εξαγάγουμε το συμπέρασμα ότι ισχύει:

$$a^{-v} = \frac{1}{a^v} = \left(\frac{1}{a}\right)^v$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-v} = \left(\frac{b}{a}\right)^v$$