

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α' τετραμήνου Ομάδα Α

Θέμα 1ο

α) Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ (Μονάδες 15)

Θεωρία.

β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ (Μονάδες 10)

- i. Αν $\alpha > \beta$ τότε για κάθε πραγματικό αριθμό γ είναι και $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- ii. Το διάστημα $[\alpha, \beta)$ αποτελείται από τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $\alpha \leq x < \beta$.
- iii. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $|\alpha|^2 = \alpha^2$.
- iv. Για κάθε α, β πραγματικούς ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$
- v. Για κάθε α, β πραγματικούς με $\alpha \neq \beta$ είναι και $|\alpha| \neq |\beta|$

Απαντήσεις : Λ - Σ - Σ - Λ - Λ

Θέμα 2ο (Μονάδες 8 – 8 – 9)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

β) Να αποδείξετε ότι : $-5 \leq \beta - \alpha \leq -3$.

γ) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\beta - \alpha| + |\alpha - 3| + |\beta + 2|$ είναι ίση με 5.

Λύση

$$\alpha) \quad 2 \leq \alpha \leq 3 \Leftrightarrow 2 - 3 \leq \alpha - 3 \leq 3 - 3 \Leftrightarrow -1 \leq \alpha - 3 \leq 0 \Leftrightarrow |\alpha - 3| = 3 - \alpha$$

$$-2 \leq \beta \leq -1 \Leftrightarrow -2 + 2 \leq \beta + 2 \leq -1 + 2 \Leftrightarrow 0 \leq \beta + 2 \leq 1 \Leftrightarrow |\beta + 2| = \beta + 2$$

$$\beta) \quad \begin{cases} -2 \leq \beta \leq -1 \\ -3 \leq -\alpha \leq -2 \end{cases} \Rightarrow -5 \leq \beta - \alpha \leq -3$$

γ) Αφού $-5 \leq \beta - \alpha \leq -3$ είναι $|\beta - \alpha| = \alpha - \beta$ και η παράσταση γίνεται

$$|\beta - \alpha| + |\alpha - 3| + |\beta + 2| = \alpha - \beta + 3 - \alpha + \beta + 2 = 5$$

Θέμα 3ο

(Μονάδες 8 – 8 – 9)

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν αντίστοιχα $d(x, 1) \leq 2$ (1) και $d(y, 4) \leq 3$ (2) .

α) Να γράψετε με τη μορφή διαστήματος το σύνολο των λύσεων της (1) και (2) αντίστοιχα .

β) Να δείξετε ότι $|x + y - 5| \leq 5$

γ) Να δείξετε ότι $|x - y| \leq 8$

Λύση

α) Είναι

$$d(x, 1) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$d(y, 4) \leq 3 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 7$$

β) 1ος τρόπος

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 7 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x + y \leq 10 \Rightarrow -5 \leq x + y - 5 \leq 5 \Rightarrow |x + y - 5| \leq 5$$

2ος τρόπος

$$d(x, 1) \leq 2 \Leftrightarrow |x - 1| \leq 2 \quad d(y, 4) \leq 3 \Leftrightarrow |y - 4| \leq 3$$

$$|x + y - 5| = |(x - 1) + (y - 4)| \leq |x - 1| + |y - 4| \leq 2 + 3 = 5$$

γ) 1ος τρόπος

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ -7 \leq -y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow -8 \leq x - y \leq 2 \Rightarrow -8 \leq x - y \leq 8 \Rightarrow |x - y| \leq 8$$

2ος τρόπος

$$d(x, 1) \leq 2 \Leftrightarrow |x - 1| \leq 2 \quad d(y, 4) \leq 3 \Leftrightarrow |y - 4| \leq 3$$

$$|x - y| = |(x - 1) - (y - 4) - 3| \leq |x - 1| + |y - 4| + 3 \leq 2 + 3 + 3 = 8$$

Θέμα 4ο

(Μονάδες 7 – 8 – 10)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

β) Να δείξετε ότι $\frac{1}{4} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 4$.

γ) Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$.

Λύση**α) 1ος τρόπος (αλγεβρικά)**

Η $|\alpha - \beta| = d(\alpha, \beta)$ εκφράζει την απόσταση των αριθμών α και β .

Θα δείξουμε ότι $|\alpha - \beta| \leq 3$

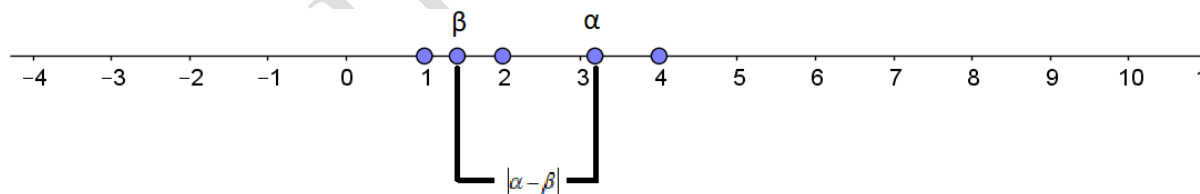
Είναι $1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow -1 \geq -\beta \geq -2 \Leftrightarrow -2 \leq -\beta \leq -1$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των $2 \leq \alpha \leq 4$, $-2 \leq -\beta \leq -1$ έχουμε ότι

$2 - 2 \leq \alpha - \beta \leq 4 - 1 \Leftrightarrow 0 \leq \alpha - \beta \leq 3$. Αφού $0 \leq \alpha - \beta$ είναι $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta \leq 3$

2ος τρόπος (γραφικά)

Η απόσταση των αριθμών α και β πάνω στον άξονα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Προφανώς λοιπόν η μεγαλύτερη τιμή της απόστασης των αριθμών α και β είναι 3 και αυτό συμβαίνει για τις ακραίες θέσεις των α και β δηλαδή μόνο όταν $\alpha = 4$ και $\beta = 1$.

β) Είναι $2 \leq \alpha \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$ οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των

$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{2}$, $1 \leq \beta \leq 2$ έχουμε ότι $\frac{1}{4} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1$.

Όμοια $1 \leq \beta \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1} \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$ οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη των

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\beta} \leq 1$, $2 \leq \alpha \leq 4$ έχουμε ότι $1 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 4$. Τελικά $\frac{1}{4} \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta} \leq 4$.

γ) Αφού δείξαμε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$ έχουμε ότι $1 - \frac{\beta}{\alpha} \geq 0$ οπότε $\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = 1 - \frac{\beta}{\alpha}$ και

$\frac{\alpha}{\beta} - 1 \geq 0$ οπότε $\left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| = \frac{\alpha}{\beta} - 1$. Συνεπώς

$$\left| 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha}{\beta} - 1 \right| \Leftrightarrow 1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta} - 1 \stackrel{\alpha, \beta > 0}{\Leftrightarrow} \alpha\beta - \alpha\beta \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \alpha\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} - \alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta - \beta^2 \leq \alpha^2 - \alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$0 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow 0 = (\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Όμως $1 \leq \beta \leq 2 \leq \alpha \leq 4$ οπότε για να είναι $\alpha = \beta$ θα πρέπει $\alpha = \beta = 2$.

Διαγώνισμα Άλγεβρας Α' τετραμήνου Ομάδα Β

Θέμα 1ο

α) Να αποδείξετε ότι $|α + β| ≤ |α| + |β|$ (Μονάδες 15)

Θεωρία

β) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ ή Λ (Μονάδες 10)

- i. Για κάθε α,β πραγματικούς με $α < β$ είναι και $\frac{1}{α} > \frac{1}{β}$
- ii. Αν $α < -2$ και $β < -3$ τότε απαραίτητα $αβ > 6$
- iii. αν $|χ| + |ψ| ≠ 0$ τότε $χ ≠ 0$ ή $ψ ≠ 0$
- iv. Για κάθε $α ∈ ℝ$ ισχύει ότι $|α|^3 = α^3$
- v. Για κάθε α,β πραγματικούς με $α < β$ είναι και $|α| < |β|$

Απαντήσεις : Λ - Σ - Σ - Λ - Λ

Θέμα 2ο (Μονάδες 8 - 8 - 9)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $α, β$ για τους οποίους ισχύει $2 ≤ α ≤ 3$ και $-2 ≤ β ≤ -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|α - 2| = α - 2$ και $|β + 1| = -β - 1$.

β) Να δείξετε ότι : $3 ≤ α - β ≤ 5$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|α - β| - |α - 2| - |β + 1|$ είναι ίση με 3.

Λύση

α) $2 ≤ α ≤ 3 ⇔ 2 - 2 ≤ α - 2 ≤ 3 - 2 ⇔ 0 ≤ α - 2 ≤ 1 ⇔ |α - 2| = α - 2$

$-2 ≤ β ≤ -1 ⇔ -2 + 1 ≤ β + 1 ≤ -1 + 1 ⇔ -1 ≤ β + 1 ≤ 0 ⇔ |β + 1| = -β - 1$

β) $\begin{cases} 2 ≤ α ≤ 3 \\ 1 ≤ -β ≤ 2 \end{cases} ⇒ 3 ≤ α - β ≤ 5$

γ) Αφού $3 ≤ α - β ≤ 5$ είναι $|α - β| = α - β$ και η παράσταση γίνεται

$$|α - β| - |α - 2| - |β + 1| = α - β - (α - 2) - (-β - 1) = α - β - α + 2 + β + 1 = 3$$

Θέμα 3ο

(Μονάδες 10 – 7 - 8)

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν αντίστοιχα $d(x, 1) \leq 3$ (1) και $d(y, 3) \leq 1$ (2) .

α) Να γράψετε με τη μορφή διαστήματος το σύνολο των λύσεων της (1) και (2) αντίστοιχα .

β) Να δείξετε ότι $|x + y - 2| \leq 6$

γ) Να δείξετε ότι $|x - y + 1| \leq 5$

Λύση

α) Είναι

$$d(x, 1) \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4$$

$$d(y, 3) \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq 4$$

β) 1ος τρόπος

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x + y \leq 8 \Rightarrow -2 \leq x + y - 2 \leq 6 \Rightarrow -6 \leq x + y - 2 \leq 6 \Rightarrow |x + y - 2| \leq 6$$

2ος τρόπος

$$d(x, 1) \leq 3 \Leftrightarrow |x - 1| \leq 3 \quad d(y, 3) \leq 1 \Leftrightarrow |y - 3| \leq 1$$

$$|x + y - 2| = |(x - 1) + (y - 3) + 2| \leq |x - 1| + |y - 3| + 2 \leq 3 + 1 + 2 = 6$$

γ) 1ος τρόπος

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 4 \\ -4 \leq -y \leq -2 \end{cases} \Rightarrow -6 \leq x - y \leq 2 \Rightarrow -5 \leq x - y + 1 \leq 3 \Rightarrow -5 \leq x - y + 1 \leq 5 \Rightarrow |x - y + 1| \leq 5$$

2ος τρόπος

$$|x - y + 1| = |(x - 1) - (y - 3) - 1| \leq |x - 1| + |y - 3| + 1 \leq 3 + 1 + 1 = 5$$

Θέμα 4ο

(Μονάδες 10 – 7 – 8)

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύουν $|x-1| \leq 2$ (1) και $d(x,4) \geq 3$ (2).

α) Να παραστήσετε στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να δείξετε ότι $x \in [-1,1]$.

β) Δεδομένου ότι $x \in [-1,1]$ να δείξετε ότι η παράσταση $|2x-3| - |5-2x|$ είναι ίση με -2.

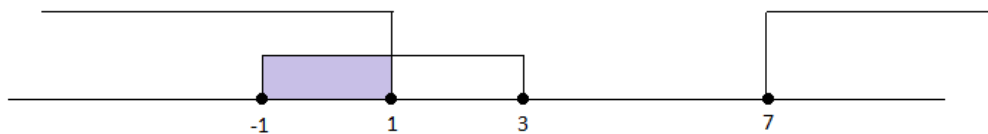
γ) Δεδομένου ότι $x \in [-1,1]$ να δείξετε ότι $|2x+1| \leq |x+2|$.

Λύση

α)

$$|x-1| \leq 2 \Leftrightarrow d(x,1) \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

$$d(x,4) \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 7 \quad \text{ή} \quad x \leq 1$$



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για να ισχύουν και η (1) και η (2) πρέπει και αρκεί $x \in [-1,1]$

β) Αφού $x \in [-1,1]$ έχουμε

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq 2x-3 \leq -1 \text{ οπότε } |2x-3| = -2x+3$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq -2x \geq -2 \Leftrightarrow 7 \geq 5-2x \geq 3 \text{ οπότε } |5-2x| = 5-2x$$

$$\text{και η παράσταση γίνεται } |2x-3| - |5-2x| = -2x+3 - (5-2x) = -2x+3-5+2x = -2$$

γ) Ισοδύναμα έχουμε

$$|2x+1| \leq |x+2| \Leftrightarrow |2x+1|^2 \leq |x+2|^2 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \leq (x+2)^2 \Leftrightarrow$$

$$4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 \leq 3 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1$$

$$\text{που ισχύει αφού } x \in [-1,1] \text{ οπότε } d(x,0) \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1.$$