

Εργασία - Απόλυτη τιμή – Ιδιότητες - Απόσταση

Θέμα 1^ο

Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $|2\alpha - \beta| = |\alpha - 2\beta|$ να δείξετε ότι $|\alpha| = |\beta|$

Λύση

$$\begin{aligned}
 |2\alpha - \beta| &= |\alpha - 2\beta| \Leftrightarrow \\
 2\alpha - \beta &= \alpha - 2\beta \quad \text{ή} \quad 2\alpha - \beta = -\alpha + 2\beta \Leftrightarrow \\
 2\alpha - \alpha &= \beta - 2\beta \quad \text{ή} \quad 2\alpha + \alpha = \beta + 3\beta \Leftrightarrow \\
 \alpha &= -\beta \quad \text{ή} \quad 3\alpha = 3\beta \Leftrightarrow \\
 \alpha &= -\beta \quad \text{ή} \quad \alpha = \beta \Leftrightarrow \\
 |\alpha| &= |\beta|
 \end{aligned}$$

Θέμα 2^ο

Αν $\alpha \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι $|2\alpha + 1| \leq |\alpha + 2|$ να δείξετε ότι $|\alpha| \leq 1$

Λύση

$$\begin{aligned}
 |2\alpha + 1| \leq |\alpha + 2| &\Leftrightarrow |2\alpha + 1|^2 \leq |\alpha + 2|^2 \Leftrightarrow (2\alpha + 1)^2 \leq (\alpha + 2)^2 \Leftrightarrow \\
 4\alpha^2 + 4\alpha + 1 &\leq \alpha^2 + 4\alpha + 4 \Leftrightarrow 3\alpha^2 \leq 3 \Leftrightarrow \alpha^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\alpha|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\alpha| \leq 1
 \end{aligned}$$

Θέμα 3^ο

Να δείξετε ότι $|\alpha\beta| + \alpha\beta \geq -\alpha|\beta| - \beta|\alpha|$ και να εξετάσετε τότε ισχύει ως ισότητα

Λύση

$$\begin{aligned}
 |\alpha\beta| + \alpha\beta &\geq -\alpha|\beta| - \beta|\alpha| \Leftrightarrow |\alpha||\beta| + \alpha\beta + \alpha|\beta| + \beta|\alpha| \geq 0 \Leftrightarrow \\
 |\beta|(|\alpha| + \alpha) + \beta(\alpha + |\alpha|) &\geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| + \alpha)(|\beta| + \beta) \geq 0 \quad \text{που ισχύει} \\
 \alpha\text{φού } |\alpha| &\geq -\alpha \Rightarrow |\alpha| + \alpha \geq 0 \quad \text{και} \quad |\beta| \geq -\beta \Rightarrow |\beta| + \beta \geq 0 \\
 \text{Ως ισότητα ισχύει όταν} \\
 |\alpha| &= -\alpha \Rightarrow \alpha \leq 0 \quad \text{ή} \quad |\beta| = -\beta \Rightarrow \beta \leq 0
 \end{aligned}$$

Θέμα 4^ο

Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 \geq -2|\alpha||\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και να εξετάσετε τότε η σχέση αυτή ισχύει ως ισότητα .

Λύση

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 + \beta^2 \geq -2|\alpha||\beta| &\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha| + |\beta|)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει} \\
 \text{Ως ισότητα ισχύει να και μόνο αν } |\alpha| + |\beta| &= 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0
 \end{aligned}$$

Θέμα 5^ο Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ \chi < 4$		
$ \chi > 4$		
$ \chi \leq 4$		
$ \chi \geq 4$		
$ \chi-1 \leq 3$		
$ \chi-1 \geq 5$		
$ \chi+2 < 7$		
$ \chi+3 > 6$		
		$\chi \in [-2, 2]$
		$\chi \in (2, 6)$
		$\chi \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
		$\chi \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

Λύση

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ \chi < 4$	$d(\chi, 0) < 4$	$\chi \in (-4, 4)$
$ \chi > 4$	$d(\chi, 0) > 4$	$\chi \in (-\infty, -4) \cup (4, +\infty)$
$ \chi \leq 4$	$d(\chi, 0) \leq 4$	$\chi \in [-4, 4]$
$ \chi \geq 4$	$d(\chi, 0) \geq 4$	$\chi \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$
$ \chi-1 \leq 3$	$d(\chi, 1) \leq 3$	$\chi \in [-2, 4]$
$ \chi-1 \geq 5$	$d(\chi, 1) \geq 5$	$\chi \in (-\infty, -4] \cup [6, +\infty)$
$ \chi+2 < 7$	$d(\chi, -2) < 7$	$\chi \in (-9, 5)$
$ \chi+3 > 6$	$d(\chi, -3) > 6$	$\chi \in (-\infty, -9) \cup (3, +\infty)$
$ \chi \leq 2$	$d(\chi, 0) \leq 2$	$\chi \in [-2, 2]$
$ \chi-4 < 2$	$d(\chi, 4) < 2$	$\chi \in (2, 6)$
$ \chi > 1$	$d(\chi, 0) > 1$	$\chi \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
$ \chi+2 \geq 1$	$d(\chi, -2) \geq 1$	$\chi \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$

Θέμα 6ο

Έστω $\chi \in \mathbb{R}$ με $|4\chi + 3| \leq |3\chi + 4|$

α) να δείξετε ότι $\chi \in [-1, 1]$

β) Να δείξετε ότι $d(\chi, -3) \leq 4$

γ) Να γράψετε την παράσταση $A = |2\chi - 3| - |4 - 3\chi|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές

Λύση

α)

$$|4\chi + 3| \leq |3\chi + 4| \Rightarrow |4\chi + 3|^2 \leq |3\chi + 4|^2 \Rightarrow (4\chi + 3)^2 \leq (3\chi + 4)^2 \Rightarrow 16\chi^2 + 24\chi + 9 \leq 9\chi^2 + 24\chi + 16 \Rightarrow 7\chi^2 \leq 7 \Rightarrow \chi^2 \leq 1 \Rightarrow |\chi|^2 \leq 1 \Rightarrow |\chi| \leq 1 \Rightarrow d(\chi, 0) \leq 1 \Rightarrow \chi \in [-1, 1]$$

β) 1^{ος} τρόπος

$$d(\chi, -3) = |\chi + 3| \leq |\chi| + 3 \leq 1 + 3 = 4 \Rightarrow d(\chi, -3) \leq 4$$

2^{ος} τρόπος

$$-1 \leq \chi \leq 1 \Rightarrow 2 \leq \chi + 3 \leq 4 \Rightarrow |\chi + 3| \leq 4$$

γ)

$$-1 \leq \chi \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\chi \leq 2 \Rightarrow -5 \leq 2\chi - 3 \leq -1 \Rightarrow |2\chi - 3| = -2\chi + 3$$

$$-1 \leq \chi \leq 1 \Rightarrow 3 \geq -3\chi \geq -3 \Rightarrow 7 \geq 4 - 3\chi \geq 1 \Rightarrow |4 - 3\chi| = 4 - 3\chi$$

$$\text{Οπότε } A = |2\chi - 3| - |4 - 3\chi| = -2\chi + 3 - (4 - 3\chi) = -2\chi + 3 - 4 + 3\chi = \chi - 1$$