

Εργασία - Διάταξη

Θέμα 1^ο

Για τυχαίους αριθμούς α, β να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες και να πείτε πότε ισχύουν ως ισότητες

$$\alpha) 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2, \quad \beta) 4\alpha^2 + 9\beta^2 + 20 \geq 4(4\alpha - 3\beta)$$

Λύση

α) Έχουμε ισοδύναμα

$$2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha - \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow$$

$$2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 0$$

που ισχύει. Ως ισότητα ισχύει όταν $\alpha + \beta = 0$, δηλαδή α, β αντίθετοι.

β) Έχουμε ισοδύναμα

$$4\alpha^2 + 9\beta^2 + 20 \geq 4(4\alpha - 3\beta) \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 9\beta^2 + 20 \geq 16\alpha - 12\beta \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 + 9\beta^2 + 20 - 16\alpha + 12\beta \geq 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 16\alpha + 16 + 9\beta^2 + 12\beta + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\alpha - 4)^2 + (3\beta + 2)^2 \geq 0$$

Ως ισότητα ισχύει όταν $2\alpha - 4 = 0$ και $3\beta + 2 = 0$ δηλαδή όταν $\alpha = 2$ και $\beta = -\frac{2}{3}$

Θέμα 2^ο Αν $\beta < 2 < \alpha$ να δείξετε ότι $2\alpha + 2\beta > 4 + \alpha\beta$

Λύση

Αφού $\beta < 2 < \alpha$ είναι $\alpha - 2 > 0$ και $2 - \beta > 0$. Είναι

$$2\alpha + 2\beta > 4 + \alpha\beta \Leftrightarrow 2\alpha + 2\beta - 4 - \alpha\beta > 0 \Leftrightarrow$$

$$2(\alpha - 2) - \beta(\alpha - 2) > 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)(2 - \beta) > 0$$

που ισχύει ως γινόμενο θετικών

Θέμα 3^ο

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4, \quad \beta) \left(\alpha + \frac{4}{\alpha} \right) \left(\beta + \frac{4}{\beta} \right) \geq 16.$$

Λύση

$$\alpha) \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \overset{\alpha > 0}{\alpha^2 + \alpha \cdot \frac{4}{\alpha} \geq 4\alpha} \Leftrightarrow \alpha^2 + 4 \geq 4\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - 2)^2 \geq 0$$

που ισχύει.

$$\beta) \text{ Από το α) ερώτημα έχουμε ότι } \alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \text{ και ομοίως } \beta + \frac{4}{\beta} \geq 4.$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις δυο ανισότητες προκύπτει:

$$\left(\alpha + \frac{4}{\alpha} \right) \left(\beta + \frac{4}{\beta} \right) \geq 16.$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha}$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = (\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)$.

β) Για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει

i. $A = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$. ii. $A \geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A = 6$;

Λύση

α) Είναι: $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18 = \alpha^2(\alpha + 2) + 9(\alpha + 2) = (\alpha + 2)(\alpha^2 + 9)$

που είναι το ζητούμενο.

β) i. Ισχύει: $\alpha^2 + 2\alpha = \alpha(\alpha + 2)$, οπότε με $\alpha > 0$ έχουμε:

$$A = \frac{\alpha^3 + 2\alpha^2 + 9\alpha + 18}{\alpha^2 + 2\alpha} = \frac{(\alpha^2 + 9)(\alpha + 2)}{\alpha(\alpha + 2)} = \frac{\alpha^2 + 9}{\alpha}$$

ii. Επειδή $\alpha > 0$ για την απόδειξη της $A \geq 6$, δηλαδή της $\frac{\alpha^2 + 9}{\alpha} \geq 6$, αρκεί να

αποδείξουμε ότι $\alpha^2 + 9 \geq 6\alpha$, ή αρκεί $\alpha^2 - 6\alpha + 9 \geq 0$, που ισχύει αφού προκύπτει από την προφανή ανισότητα $(\alpha - 3)^2 \geq 0$.

Η ισότητα $A = 6$ ισχύει μόνο όταν $(\alpha - 3)^2 = 0$, δηλαδή μόνο όταν $\alpha = 3$.

Θέμα 5^ο

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$. ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$.

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A .

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν

η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

ΛΥΣΗ

α) Ισοδύναμα έχουμε

$$\text{i. } x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{ii. } x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + 1 - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} \geq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

$$\text{Ως ισότητα ισχύει αν και μόνο αν } x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

β) Για $x \neq \frac{1}{2}$ και $x \neq -\frac{1}{2}$, όπως δείξαμε στο α) ερώτημα, είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και

$x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό κατά μέλη έχουμε

$$(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}.$$

Επίσης, για $x = \frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 > \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 = \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Τέλος, για $x = -\frac{1}{2}$ είναι $x^2 + x + 1 = \frac{3}{4}$ και $x^2 - x + 1 > \frac{3}{4}$, οπότε με πολλαπλασιασμό

κατά μέλη έχουμε $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$.

Επομένως $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ)

i. Η παράσταση A ορίζεται για κάθε πραγματική τιμή του x για την οποία ισχύει $x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$.

ii. Είναι

$$A = \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$.

Όπως δείξαμε στο β) είναι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε

$A > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$ και επομένως η παράσταση A δεν μπορεί να

πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

Εναλλακτικά, θα εξετάσουμε αν η εξίσωση $\frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} = \frac{9}{16}$ έχει λύση στο

$\mathbb{R} - \{1, -1\}$. Είναι ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \frac{(x^3 - 1)(x^3 + 1)}{x^2 - 1} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\ \frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\ \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\ \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} &= \frac{9}{16} \Leftrightarrow \\ 16(x^4 + x^2 + 1) &= 9 \Leftrightarrow \\ 16x^4 + 16x^2 + 16 - 9 &= 0 \Leftrightarrow \\ 16x^4 + 16x^2 + 7 &= 0 \end{aligned}$$

και επειδή $16x^4 + 16x^2 + 7 \geq 7 > 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η

παράσταση A δεν μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.