

Θέμα 1^ο

Να βρείτε την τιμή της παράστασης όταν α,β αντίστροφοι : $\frac{\left[(\alpha^2\beta^3)^{-1} \cdot (\alpha\beta^3)^2\right]^2}{(\alpha^3\beta)^{-3}}$

Λύση

Αφού α,β αντίστροφοι είναι αβ=1

$$\frac{\left[(\alpha^2\beta^3)^{-1} \cdot (\alpha\beta^3)^2\right]^2}{(\alpha^3\beta)^{-3}} = \frac{(\alpha^{-2}\beta^{-3} \cdot \alpha^2\beta^6)^2}{\alpha^{-9}\beta^{-3}} = \frac{(\alpha^0\beta^3)^2}{\alpha^{-9}\beta^{-3}} = \frac{\alpha^0\beta^6}{\alpha^{-9}\beta^{-3}} = \alpha^9\beta^9 = (\alpha\beta)^9 = 1^9 = 1$$

Θέμα 2^ο Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$A = \frac{(\chi^2)^3 \chi^5}{\chi^{10}}, \quad B = \frac{(\chi^{-2})^3 \chi^2}{(\chi^{-3})^3}, \quad \Gamma = \frac{(\chi^{-1}\psi^{-2}\zeta)^{-2}}{\chi^3\psi^{-4}\zeta^{-3}}, \quad \Delta = \left(\frac{\chi^2\psi^{-2}\zeta^{-3}}{\chi^{-3}\psi^{-1}\zeta}\right)^{-2}$$

Λύση

$$A = \frac{(\chi^2)^3 \chi^5}{\chi^{10}} = \frac{\chi^6 \chi^5}{\chi^{10}} = \frac{\chi^{11}}{\chi^{10}} = \chi$$

$$B = \frac{(\chi^{-2})^3 \chi^2}{(\chi^{-3})^3} = \frac{\chi^{-6} \chi^2}{\chi^{-9}} = \frac{\chi^{-4}}{\chi^{-9}} = \chi^{-4-(-9)} = \chi^5$$

$$\Gamma = \frac{(\chi^{-1}\psi^{-2}\zeta)^{-2}}{\chi^3\psi^{-4}\zeta^{-3}} = \frac{\chi^2\psi^4\zeta^{-2}}{\chi^3\psi^{-4}\zeta^{-3}} = \chi^{-1}\psi^8\zeta$$

$$\Delta = \left(\frac{\chi^2\psi^{-2}\zeta^{-3}}{\chi^{-3}\psi^{-1}\zeta}\right)^{-2} = (\chi^5\psi^{-1}\zeta^{-4})^{-2} = \chi^{-10}\psi^2\zeta^8$$

Θέμα 3^ο Να δείξετε ότι

α) ο αριθμός $2^{ν+1} + 2^{ν+3}$ όπου ν φυσικός είναι πολλαπλάσιο του 10

β) $4^ν + 2^{2ν} = 2^{2ν+1}$ όπου ν φυσικός

γ) $\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}\right)^{-1} = \alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1}$, $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$

Λύση

α) $2^{ν+1} + 2^{ν+3} = 2 \cdot 2^ν + 2^3 \cdot 2^ν = 2^ν \cdot (2 + 2^3) = 2^ν \cdot (2 + 8) = 2^ν \cdot 10 = \text{πολ/σιο του } 10$

β) $4^ν + 2^{2ν} = (2^2)^ν + 2^{2ν} = 2^{2ν} + 2^{2ν} = 2 \cdot 2^{2ν} = 2^{2ν+1}$

γ) $\left(\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}\right)^{-1} = \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} + \frac{\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1}$

Θέμα 3^ο Να αποδειχθούν οι ταυτότητες ι,ιι) και η ταυτότητα υπό συνθήκη ιιι

i) $(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\beta - 1)(\beta + 1)$

ii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

iii) $3\alpha - \beta^2 - 3\beta + 2\alpha\beta = \alpha^2$ όταν $\alpha - \beta = 3$

Λύση

i) $(\alpha\beta - 1)^2 - (\alpha - \beta)^2 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)(\beta - 1)(\beta + 1) \Leftrightarrow$
 $\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 1 - (\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) = (\alpha^2 - 1)(\beta^2 - 1) \Leftrightarrow$
 $\alpha^2\beta^2 - 2\alpha\beta + 1 - \alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1 \Leftrightarrow$
 $\alpha^2\beta^2 + 1 - \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2\beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + 1$ που ισχύει

ii) 2^ο μέλος $= (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$

iii) $\alpha - \beta = 3 \Rightarrow \alpha - 3 = \beta$ (1)

1^ο μέλος $= 3\alpha - \beta^2 - 3\beta + 2\alpha\beta \stackrel{(1)}{=} 3\alpha - (\alpha - 3)^2 - 3(\alpha - 3) + 2\alpha(\alpha - 3) =$
 $= 3\alpha - \alpha^2 + 6\alpha - 9 - 3\alpha + 9 + 2\alpha^2 - 6\alpha = \alpha^2$