

ΘΕΜΑ 1ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

ΛΥΣΗ

α) Ανοίγοντας τις παρενθέσεις στη δοθείσα ισότητα, έχουμε:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 6 + 4xy = 5y^2 - 1 \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 - 5y^2 = 6 - 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5.$$

β) Παρατηρούμε ότι $P = [(x + y)(x - y)]^3 = (x^2 - y^2)^3 = 5^3 = 125$.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι:

α) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$.

β) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι.

ΛΥΣΗ

α) Εφόσον οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ έχουμε:

$$(2\alpha - 1)(\beta - 1) = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta - \beta - 2\alpha + 1 = 1 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = 2\alpha + \beta.$$

β) Για να είναι οι αριθμοί x και y αντίθετοι αρκεί να δείξουμε ότι:

$$x + y = 0.$$

Συνεπώς,

$$x + y = (\alpha - \beta) + \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta = \alpha - \beta + \alpha - 2\alpha\beta + 2\beta = 2\alpha + \beta - 2\alpha\beta = 0$$

ισχύει.

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $(x + 4y)(x + y) = 9xy$.

α) Να αποδείξετε ότι : i. $(2y - x)^2 = 0$ ii. $y = \frac{x}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι : $\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$.

ΛΥΣΗ

α) i. Από τη δοσμένη ισότητα με πράξεις έχουμε:

$x^2 + 4xy + xy + 4y^2 - 9xy = 0$, οπότε $x^2 + 4y^2 - 4xy = 0$, δηλαδή $(2y - x)^2 = 0$ που είναι το ζητούμενο.

ii. Είναι: $(2y - x)^2 = 0$, οπότε $2y - x = 0$, άρα $y = \frac{x}{2}$ που είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε: $\frac{x}{2} = y$, (1).

Με τη βοήθεια της (1) έχουμε:

$$\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = (2y - y)^2 + (2y + y)^2 = y^2 + (3y)^2 = y^2 + 9y^2 = 10y^2$$

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι : i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$. ii. $\alpha + \beta = 1$.

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

ΛΥΣΗ

α) i. Αν αντικαταστήσουμε τα α^2, β^2 από τις δοσμένες ισότητες, βρίσκουμε ότι

$$\alpha^2 - \beta^2 = 2\alpha + \beta - 2\beta - \alpha = \alpha - \beta.$$

ii. Η τελευταία ισότητα γράφεται $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) = \alpha - \beta$. Αλλά, $\alpha - \beta \neq 0$, αφού οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους, οπότε παίρνουμε $\alpha + \beta = 1$, που είναι το ζητούμενο.

β) Όπως προηγουμένως, έχουμε:

$$A = \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha + \beta + 2\beta + \alpha = 3\alpha + 3\beta = 3(\alpha + \beta) = 3 \cdot 1 = 3$$

αφού $\alpha + \beta = 1$.

ΘΕΜΑ 5ο

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $A = 2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2 = x^2$

β) Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε στην α) όπου $x = 2021$ και $y=1$ προκύπτει ότι το αριστερό μέλος είναι της μορφής: $2(x^2 + 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) - 6xy - y^2$ άρα θα είναι ίσο με το A , επομένως και ίσο με το $x^2 = 2021^2$ επομένως ο ζητούμενος φυσικός είναι ο 2021.

ΘΕΜΑ 6ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι: $(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$.

β) $\alpha = \beta$.

Λύση

α) Κάνοντας πράξεις στη δοθείσα σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} + \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \beta \cdot \frac{1}{\alpha} + \beta \cdot \frac{1}{\beta} = 4, \text{ τότε}$$

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 = 4, \text{ τότε}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2,$$

το οποίο είναι το ζητούμενο.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

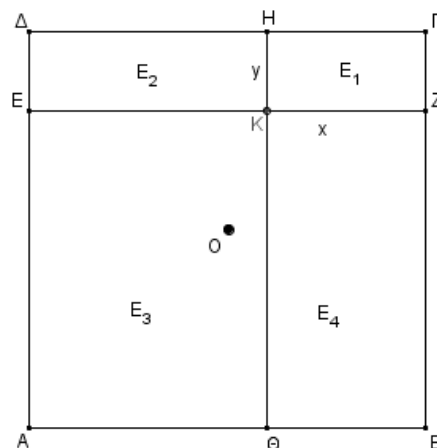
$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

ΘΕΜΑ 7ο

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες EZ και $H\Theta$ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ=x$ και $KH=y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:



α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y .

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x=4$ και $y=2$.

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα EZ και $H\Theta$ διέρχεται από το κέντρο O του τετραγώνου.

ΛΥΣΗ

α) Με $x, y \in (0, 6)$ είναι:

$$E_1 = xy, E_2 = (6-x)y = 6y - xy, E_3 = (6-x)(6-y) = 36 - 6x - 6y + xy, E_4 = x(6-y) = 6x - xy$$

β) Με $x=4, y=2$ έχουμε:

$$E_1 = x \cdot y = 2 \cdot 4 = 8$$

$$E_2 = (6-x)y = 2 \cdot 2 = 4$$

$$E_3 = (6-x)(6-y) = 2 \cdot 4 = 8$$

$$E_4 = x(6-y) = 4 \cdot 4 = 16$$

γ) i. Από την ισότητα $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$ παίρνουμε

$$xy + 36 - 6x - 6y + xy = 6y - xy + 6x - xy$$

οπότε $4xy + 36 = 12x + 12y$, που γράφεται $xy + 9 = 3(x + y)$ και είναι η ζητούμενη ισότητα.

ii. Από την ισότητα του ερωτήματος (γ)i. έχουμε:

$$xy - 3x + 9 - 3y = 0, \text{ οπότε } x(y-3) - 3(y-3) = 0, \text{ δηλαδή } (y-3)(x-3) = 0, \text{ άρα}$$

$$y = 3 \text{ ή } x = 3.$$

3ο ΠΡΟΤΥΠΟ ΓΕΛ ΙΛΙΟΥ

- Αν $\gamma = 3$, τότε $(KH) = 3$, οπότε το τμήμα ΕΖ διέρχεται από το Ο.
- Αν $\chi = 3$, τότε $(KZ) = 3$, οπότε το τμήμα ΘΗ διέρχεται από το Ο.

Επομένως, σε κάθε περίπτωση, τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.