

Θέμα 1° Ερωτήσεις τύπου σωστό-λάθος

- 1) Αν $\alpha > \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$
- 2) Αν $\alpha > \beta > 0$ τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$
- 3) Αν $\alpha\beta > 0$ τότε απαραίτητα $\alpha > 0$ και $\beta > 0$
- 4) Αν $0 > \alpha > \beta$ τότε $\alpha^2 < \beta^2$
- 5) Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha^3 > \beta^3$
- 6) Αν $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ τότε απαραίτητα $\alpha > \beta$
- 7) Αν $\alpha^2 > 4$ τότε απαραίτητα $\alpha > 2$
- 8) Αν $\alpha < -3$ τότε $\alpha^2 < 9$
- 9) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha + \delta > \beta + \gamma$
- 10) Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha - \gamma > \beta - \delta$

ΛΥΣΗ

- 1- Σ , 2 - Σ , 3 - Λ μπορεί $\alpha < 0$ και $\beta < 0$, 4 - Σ , 5 - Σ
 6 - Λ αν $\beta < 0$ τότε $\alpha < \beta$, 7 - Λ π.χ. $\alpha = -3$, 8 - Λ , 9 - Σ , 10 - Σ

Θέμα 2°

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0, \alpha^3, 1, \alpha, \frac{1}{\alpha}.$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ Έχουμε: } 0 < \alpha < 1 \stackrel{\cdot \alpha^2 > 0}{\Leftrightarrow} 0 < \alpha^3 < \alpha^2 & \text{ (1)} \end{array} \quad \text{και} \quad \begin{array}{l} 0 < \alpha < 1 \stackrel{\cdot \alpha > 0}{\Leftrightarrow} \\ 0 < \alpha^2 < \alpha & \text{ (2)} \end{array}$$

Από (1) και (2) έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha$.

β) Από το δεδομένο και το α) ερώτημα έχουμε $0 < \alpha^3 < \alpha < 1$. Επιπλέον επειδή ο α είναι θετικός αριθμός, ομόσημος του 1 δηλαδή, έχουμε ισοδύναμα: $\alpha < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} > 1$.

$$\text{Τελικά } 0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \frac{1}{\alpha}.$$

Θέμα 3^ο

Αν $2 \leq \chi \leq 3$ και $4 \leq \psi < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παρακάτω παραστάσεις :

α) $2\chi - 1$, β) $-3\psi + 4$, γ) $\chi + \psi$, δ) $\chi - \psi$, ε) $\chi\psi$, στ) $\frac{\chi}{\psi}$, ζ) χ^2 , η) ψ^3

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \quad 2 \leq \chi \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2\chi \leq 6 \Leftrightarrow 3 \leq 2\chi - 1 \leq 5$$

$$\beta) \quad 4 \leq \psi < 5 \Leftrightarrow -12 \geq -3\psi > -15 \Leftrightarrow -8 \geq -3\psi + 4 > -11$$

$$\gamma) \quad 6 \leq \chi + \psi < 8$$

$$\delta) \quad -3 < \chi - \psi \leq -1$$

$$\epsilon) \quad 8 \leq \chi\psi < 15$$

$$\sigma\tau) \quad \frac{2}{5} < \frac{\chi}{\psi} \leq \frac{3}{4}$$

$$\zeta) \quad 4 \leq \chi^2 \leq 9$$

$$\eta) \quad 64 \leq \psi^3 < 125$$

Θέμα 4^ο

Αν $-3 \leq \chi \leq -2$ και $-5 < \psi \leq -4$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών

βρίσκονται οι παρακάτω παραστάσεις : α) $\chi\psi$, β) $\frac{\chi}{\psi}$, γ) χ^2 , δ) ψ^3

ΛΥΣΗ

α) Πολ/με κατά μέλη και επειδή όλοι οι όροι είναι αρνητικοί η φορά αλλάζει

$$8 \leq \chi\psi < 15$$

β) Επειδή δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη εργαζόμαστε ως εξής

$$-5 < \psi \leq -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} > \frac{1}{\psi} \geq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\psi} < -\frac{1}{5}$$

$$\text{και με πολ/σμο κατά μέλη έχουμε } -\frac{1}{4} \cdot (-3) \geq \frac{1}{\chi} \cdot \psi < -\frac{1}{5} \cdot (-2) \Rightarrow \frac{3}{4} \geq \frac{\psi}{\chi} > \frac{2}{5}$$

- γ) Υψώνουμε όλους τους όρους της ανίσωσης $-3 \leq \chi \leq -2$ στο τετράγωνο και επειδή όλοι οι όροι είναι αρνητικοί η φορά αλλάζει. Είναι $-3 \leq \chi < -1 \Leftrightarrow 9 \geq \chi^2 \geq 4$
- δ) Υψώνουμε όλους τους όρους της ανίσωσης $-5 < \psi \leq -4$ στην τρίτη και επειδή είναι περιττή δύναμη η φορά παραμένει. Είναι $(-5)^3 < \psi^3 \leq (-4)^3 \Rightarrow -125 < \psi^3 \leq -64$

Θέμα 5^ο

Αν $1 \leq \chi < 3$ και $-4 < \psi \leq -2$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις α) $\chi\psi$, β) $\frac{\psi}{\chi}$, γ) $\chi^2 + \psi^2$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή οι όροι της μιας ανίσωσης είναι θετικοί ενώ της άλλης αρνητικοί δεν μπορούμε να πολ/με κατά μέλη τις δοσμένες ανισότητες και δουλεύουμε ως εξής :

$$-4 < \psi \leq -2 \Rightarrow 4 > -\psi \geq 2 \Rightarrow 2 \leq -\psi < 4$$

και πολ/με κατά μέλη τις ανισότητες $1 \leq \chi < 3$ και $2 \leq -\psi < 4$ και έχουμε $2 \leq -\chi\psi < 12 \Rightarrow -2 \geq \chi\psi > -12$

β) Επειδή δεν μπορούμε να διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη εργαζόμαστε ως εξής

$$1 \leq \chi < 3 \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\chi} > \frac{1}{3} \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{\chi} < -\frac{1}{3}$$

και με πολ/σμο κατά μέλη με την $-4 < \psi \leq -2$ έχουμε

$$-1 \cdot (-4) > -\frac{1}{\chi} \cdot \psi > -\frac{1}{3} \cdot (-2) \Rightarrow 4 > -\frac{\psi}{\chi} > \frac{2}{3} \Rightarrow -4 < \frac{\psi}{\chi} < -\frac{2}{3}$$

γ) Υψώνουμε όλους τους όρους της κάθε ανίσωσης στο τετράγωνο και επειδή στην 1^η όλοι οι όροι είναι θετικοί η φορά παραμένει ενώ στη 2^η που είναι όλοι οι όροι αρνητικοί η φορά αλλάζει

$$1 \leq \chi < 3 \Rightarrow 1 \leq \chi^2 < 9$$

$$-4 < \psi \leq -2 \Rightarrow 16 > \psi^2 \geq 4 \Rightarrow 4 \leq \psi^2 < 16$$

και με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε $5 \leq \chi^2 + \psi^2 < 25$

Θέμα 6^ο

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$. β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$.

ΛΥΣΗ

α) Με $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$, οπότε, $\frac{3}{\alpha} > \frac{3}{\beta}$. Επομένως, $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$.

β) Με $0 < \alpha < \beta$ έχουμε $\alpha^3 < \beta^3$. Επιπλέον, από το ερώτημα (α) είναι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$, οπότε με

πρόσθεση των δυο ανισοτήτων παίρνουμε:

$$\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$$

που είναι το ζητούμενο.

Θέμα 7^ο

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $\Pi = 2x + 2y$. Τότε:

$$4 \leq x \leq 7 \Leftrightarrow 2 \cdot 4 \leq 2x \leq 2 \cdot 7 \Leftrightarrow 8 \leq 2x \leq 14 \quad (1) \quad \text{και}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 2 \leq 2y \leq 2 \cdot 3 \Leftrightarrow 4 \leq 2y \leq 6 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$8 + 4 \leq 2x + 2y \leq 14 + 6 \Leftrightarrow 12 \leq \Pi \leq 20.$$

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί η νέα περίμετρος θα είναι:

$$P = 2(x - 1) + 2 \cdot 3y = 2x + 6y - 2. \text{ Τότε:}$$

$$2 \leq y \leq 3 \Leftrightarrow 6 \cdot 2 \leq 6y \leq 6 \cdot 3 \Leftrightarrow 12 \leq 6y \leq 18$$

$$\Leftrightarrow 12 - 2 \leq 6y - 2 \leq 18 - 2 \Leftrightarrow 10 \leq 6y - 2 \leq 16 \quad (3)$$

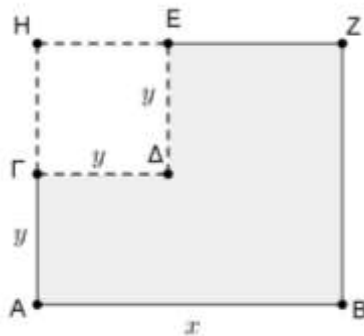
Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (3) και βρίσκουμε:

$$8 + 10 \leq 2x + 6y - 2 \leq 14 + 16 \Leftrightarrow 18 \leq P \leq 30.$$

Θέμα 8^ο

Από το ορθογώνιο ABZH αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

ΛΥΣΗ

α) Η περίμετρος του EZBAΓΔ είναι:

$$\begin{aligned}\Pi &= AB + BZ + ZE + E\Delta + \Delta\Gamma + \Gamma A = \\ &x + 2y + x - y + y + y + y = 2x + 4y\end{aligned}$$

β) Είναι:

$$5 < x < 8 \Leftrightarrow 2 \cdot 5 < 2x < 2 \cdot 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16 \quad (1)$$

$$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 \cdot 1 < 4y < 4 \cdot 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισώσεις (1) και (2) και βρίσκουμε:

$$10 + 4 < 2x + 4y < 16 + 8 \Leftrightarrow 14 < \Pi < 24$$