

Θέμα 2.1

α) Τα τριώνυμο $x^2 + 2x - 3$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$, οπότε έχει δύο

$$\text{ρίζες άνισες τις } x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

και παραγοντοποιείται ως εξής : $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.

β) i. Πρέπει $x-1 \neq 0$ δηλαδή $x \neq 1$ οπότε το πεδίο ορισμού είναι το $A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.

ii. Από το α) ερώτημα δείξαμε ότι $x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$ οπότε

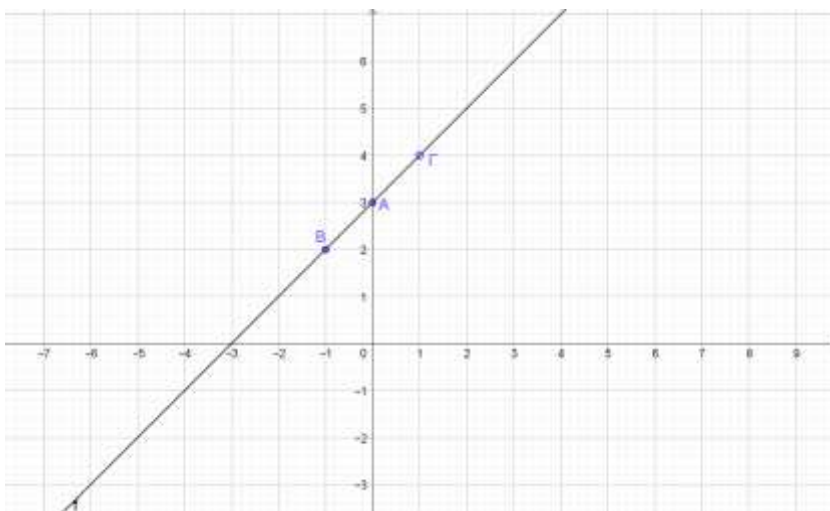
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} = \frac{(x+3)(x-1)}{(x-1)} = x+3 \text{ για κάθε } x \in A = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$

iii. Η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x+3$ από την οποία θα εξαιρέσουμε το σημείο που έχει τετμημένη 1, αφού το 1 δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της f .

Για $x=0$ έχουμε $y=0+3$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $A(0,3)$.

Για $x=-1$ έχουμε $y=-1+3=2$ οπότε ένα σημείο της ευθείας $y=x+3$ είναι το $B(-1,2)$.

Για $x=1$ έχουμε $y=1+3=4$ οπότε το σημείο της ευθείας $y=x+3$ που θα εξαιρέσουμε είναι το $\Gamma(1,4)$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θέμα 2.2

α) $A = [-10, 5)$ και $f(A) = [-3, 5]$.

β) $f(-2) = 5$, $f(0) = 3$, $f(3) = 0$.

γ) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -7$ ή $x = 3$ (οι τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$).

δ) $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in [-10, -7) \cup (3, 5)$ (οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον $x'x$).

Θέμα 4.1

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$, ισοδύναμα $x^2 = x$, δηλαδή $x^2 - x = 0$, οπότε $x(x-1) = 0$ και τελικά $x = 0$ ή $x = 1$.

Επειδή το σημείο A είναι πιο αριστερά από το σημείο B , η τετμημένη του A είναι 0 και η τετμημένη του B είναι 1.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$, οπότε $A(0, 0)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$, οπότε $B(1, 1)$.

β) i. Από το σχήμα βλέπουμε ότι η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g , για τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της g που είναι μεταξύ των A, B , δηλαδή για $0 < x < 1$.

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g για τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x^2 < x$. Η ανίσωση $x^2 < x$ ισοδύναμα γίνεται $x^2 - x < 0$ που είναι μία ανίσωση 2ου βαθμού και η λύση της βασίζεται στο πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x$, που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	○	○	+

Συνεπώς πράγματι $x^2 < x$ για $0 < x < 1$.

Σημείωση: Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $x^2 < x$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}$

αφού ισοδύναμα $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$. Συνεπώς το τετράγωνο οποιουδήποτε αριθμού δεν είναι

πάντα μεγαλύτερο από τον ίδιο τον αριθμό.

γ) Αφού $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 < \frac{\alpha}{\beta}$ με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$. Συνεπώς

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{\alpha}{\beta} < 1 \text{ οπότε, } \frac{|\alpha|}{|\beta|} < 1 \text{ και ισοδύναμα } |\alpha| < |\beta|.$$

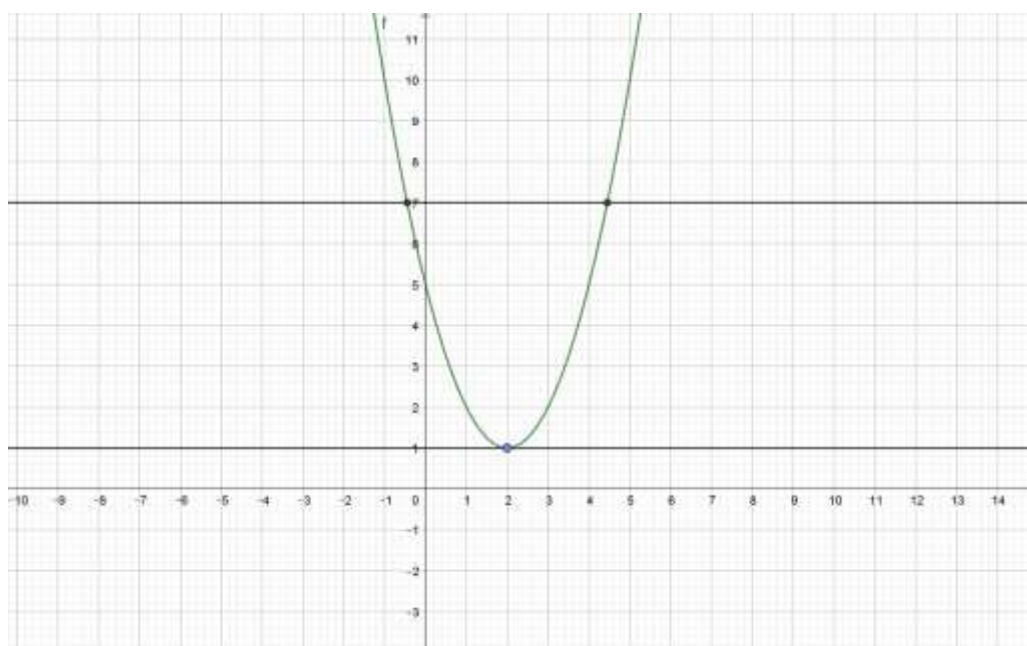
Θέμα 4.2

α) Η ευθεία $y = 7$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,7)$ και όπως βλέπουμε από το σχήμα έχει 2 κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 7$ είναι ίσο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 7$. Είναι

$$f(x) = 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - 7 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 2 = 0.$$

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta = 24 > 0$ που σημαίνει ότι έχει δύο ρίζες άνισες και επομένως αποδείχτηκε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με την ευθεία $y = 7$ ακριβώς δύο κοινά σημεία.



β) i. Η ευθεία $y = \lambda$ είναι παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, \lambda)$.

Από το σχήμα βλέπουμε ότι το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, εξαρτάται από το αν η τιμή του λ είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με 1, διότι με βάση το

σχήμα βλέπουμε ότι η μικρότερη τιμή της συνάρτησης είναι 1. Συγκεκριμένα βλέπουμε από το σχήμα ότι:

αν $\lambda < 1$ η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,

αν $\lambda = 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,

αν $\lambda > 1$ η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

ii. Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι το ίδιο με το πλήθος των διαφορετικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Η εξίσωση αυτή είναι 2ου βαθμού ως προς x με διακρίνουσα

$$\Delta = (-4)^2 - 4(5 - \lambda) = 16 - 20 + 4\lambda = 4\lambda - 4 = 4(\lambda - 1).$$

Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας.

Συγκεκριμένα :

➤ αν $\lambda < 1$ τότε $\Delta < 0$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ δεν έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f ,

➤ αν $\lambda = 1$ τότε $\Delta = 0$ οπότε η εξίσωση έχει 1 διπλή ρίζα και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f ,

➤ αν $\lambda > 1$ τότε $\Delta > 0$ οπότε η εξίσωση έχει 2 ρίζες άνισες και επομένως η ευθεία $y = \lambda$ έχει δύο κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της f .

γ) Αφού η ευθεία $y = \lambda$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ συμπεραίνουμε αφενός ότι $\lambda > 1$ και αφετέρου ότι οι αριθμοί x_1, x_2 θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = \lambda \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 - \lambda = 0$.

Η εξίσωση αυτή για $\lambda > 1$ έχει δύο ρίζες άνισες και έχουμε ότι

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4.$$

Θέμα 4.3

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x - 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A(\omega, 0)$, $B(\phi, 0)$, οπότε ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $\omega < 0 < \phi$ αφού το σημείο $O(0,0)$ είναι μεταξύ των A και B στον άξονα $x'x$.

Η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$ έχει διακρίνουσα $\Delta = 5$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Επειδή $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ έχουμε ότι $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $\omega = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

i. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$ έχουμε ότι $\omega + \phi = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1$.

ii. Αφού ω, ϕ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ δηλαδή της $x^2 - x - 1 = 0$ έχουμε ότι $\omega \cdot \phi = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$.

β) Είναι $(OB) = |\phi| = \left| \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $(OA) = |\omega| = \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Επειδή $\frac{\sqrt{5}+1}{2} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ συμπεραίνουμε ότι $(OB) > (OA)$.

Εναλλακτικά, είναι $(OB) = |\phi| = \phi$ αφού $\phi > 0$ και $(OA) = |\omega| = -\omega$ αφού $\omega < 0$.

Είναι $(OB) > (OA) \Leftrightarrow \phi > -\omega \Leftrightarrow \phi + \omega > 0 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει.

γ) Αφού ο β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, έχουμε ότι $\beta - \frac{1}{\beta} > 1$ και εφόσον $\beta > 0$ έχουμε

ισοδύναμα $\beta^2 - 1 > \beta \Leftrightarrow \beta^2 - \beta - 1 > 0$. Το τριώνυμο $x^2 - x - 1$ έχει ρίζες ω, ϕ και γίνεται θετικό, δηλαδή ομόσημο του $\alpha = 1$, για $x < \omega$ ή $x > \phi$. Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

Εναλλακτικά, $\beta^2 - \beta - 1 > 0 \Leftrightarrow f(\beta) > 0$. Από τη γραφική παράσταση της f βλέπουμε ότι τα σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν θετική τεταγμένη, δηλαδή είναι πάνω από τον άξονα $x'x$, είναι αυτά που είναι δεξιά του B ή αριστερά του A . Συνεπώς $\beta < \omega$ ή $\beta > \phi$. Όμως $\beta > 0$, οπότε $\beta > \phi$.

δ) Είναι $f\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{25}{9} - \frac{5}{3} - 1 = \frac{1}{9} > 0$ και επειδή $\frac{5}{3} > 0$ έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

Εναλλακτικά, $\frac{5}{3} - \frac{3}{5} = \frac{16}{15} > 1$, οπότε με βάση το γ) έχουμε ότι $\phi < \frac{5}{3}$.

Θέμα 4.4

α) Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της ευθείας $y = x$ με τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$, οπότε οι τετμημένες των A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1}{x} = x \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Όμως από το σχήμα βλέπουμε ότι το σημείο B είναι στο 3ο τεταρτημόριο οπότε έχει αρνητική τετμημένη και το σημείο A στο 1ο οπότε έχει θετική τετμημένη. Συνεπώς $A(1, f(1))$ δηλαδή $A(1, 1)$ και $B(-1, f(-1))$ δηλαδή $B(-1, -1)$.

Παρατηρούμε ότι τα σημεία A, B έχουν αντίθετες συντεταγμένες οπότε είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $O(0, 0)$, δηλαδή το $O(0, 0)$ είναι το μέσο του AB .

β) Αφού $M(x, y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f , είναι $x \neq 0$ και $f(x) = y$ δηλαδή $y = \frac{1}{x}$ (1).

Το συμμετρικό του M ως προς το $O(0, 0)$ είναι το $M'(-x, -y)$ και για να ανήκει στη γραφική παράσταση της f , πρέπει και αρκεί $f(-x) = -y$ ισοδύναμα $-y = -\frac{1}{x}$

ισοδύναμα $y = \frac{1}{x}$ που ισχύει από την (1).

Σημείωση : Αυτό γραφικά σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f έχει κέντρο συμμετρίας το O .

γ) Ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned}
(AB) &\leq (MM') \Leftrightarrow \\
\sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2} &\leq \sqrt{(x+x)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right)^2} \Leftrightarrow \\
\sqrt{8} &\leq \sqrt{4x^2 + \frac{4}{x^2}} \Leftrightarrow \\
8 &\leq 4x^2 + \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow \\
2 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \\
0 &\leq x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Leftrightarrow \\
0 &\leq \left(x - \frac{1}{x}\right)^2
\end{aligned}$$

που ισχύει για κάθε $x \neq 0$.

$$\text{Τέλος, } (AB) = (MM') \Leftrightarrow 0 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{x} \stackrel{\alpha)}{\Leftrightarrow} x = \pm 1$$

που σημαίνει ότι ισχύει όταν τα σημεία M, M' ταυτίζονται με τα σημεία A, B .

Σημείωση: αυτό σημαίνει ότι η απόσταση AB είναι η μικρότερη απόσταση μεταξύ δύο σημείων της υπερβολής που είναι συμμετρικά ως προς το $(0,0)$.

Θέμα 4.5

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \in A$.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}.$$

Επειδή $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $1 \notin A$ η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x} = \frac{x(x^6 - 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^4 + x^2 + 1 \text{ για}$$

κάθε $x \in A$.

δ) Είναι $f(x)=3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega=1$, $\omega=-2$ αφού $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -1$ και

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = -2.$$

Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A .

Για $\omega=-2$ έχουμε $x^2=-2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x)=3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A .

Θέμα 4.6

α) Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Τα σημεία A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$, οπότε οι τετμημένες τους α, β αντίστοιχα είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$. Είναι $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0$ που είναι εξίσωση 2ου βαθμού με διακρίνουσα $\Delta=13$ και ρίζες τους αριθμούς $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$. Επειδή το σημείο A βρίσκεται αριστερά του B στον άξονα

$x'x$ είναι $\alpha < \beta$ και επειδή προφανώς $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$, έχουμε τελικά ότι

$$\alpha = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \text{ και } \beta = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

β) Είναι $f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - \sqrt{2} - 3 = 2 - \sqrt{2} - 3 = -1 - \sqrt{2} < 0$, οπότε $f(\sqrt{2}) < 0$.

γ) Όπως φαίνεται από το σχήμα αλλά και όπως προκύπτει και αλγεβρικά από τον τύπο της συνάρτησης f που είναι τριώνυμο, η συνάρτηση f παίρνει αρνητικές τιμές μόνο για τις τιμές του x που είναι εντός των ριζών της, δηλαδή για

$x \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$. Αφού λοιπόν δείξαμε στο β) ερώτημα ότι $f(\sqrt{2}) < 0$, θα

πρέπει $\sqrt{2} \in \left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2} \right)$, δηλαδή $\frac{1-\sqrt{13}}{2} < \sqrt{2} < \frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

δ) Η παράλληλη από το $\Gamma(\gamma, \delta)$ στον $x'x$ έχει εξίσωση $y = \delta$. Αφού η ευθεία με εξίσωση $y = \delta$ έχει με τη γραφική παράσταση της f ένα κοινό σημείο, συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση $f(x) = \delta \Leftrightarrow x^2 - x - 3 - \delta = 0$ έχει μία πραγματική ρίζα και αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν έχει διακρίνουσα ίση με το μηδέν. Είναι $\Delta = 0 \Leftrightarrow (-1)^2 - 4(-3 - \delta) = 0 \Leftrightarrow 1 + 12 + 4\delta = 0 \Leftrightarrow \delta = -\frac{13}{4}$.

Επίσης η τετμημένη γ του σημείου Γ θα είναι η διπλή ρίζα της εξίσωσης

$$f(x) = \delta \Leftrightarrow x^2 - x - 3 - \delta = 0, \text{ οπότε } \gamma = -\frac{-1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}.$$

Εναλλακτικά αφού το σημείο $\Gamma(\gamma, \delta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε

$$f(\gamma) = \delta \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma - 3 = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma - 3 + \frac{13}{4} = 0 \Leftrightarrow \gamma^2 - \gamma + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(\gamma - \frac{1}{2} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{2}$$

Θέμα 4.7

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = g(x)$

ισοδύναμα $x^2 = x^3$, δηλαδή $x^2 - x^3 = 0$, οπότε $x^2(1-x) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 1$.

Για $x = 0$ είναι $f(0) = 0$ οπότε $A(0, 0)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1, 1)$.

β) Από το σχήμα βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (0, 1)$, δηλαδή για τις τετμημένες των σημείων μεταξύ των A και B , η γραφική παράσταση της g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της f , πράγμα που σημαίνει ότι $x^3 < x^2$.

Εναλλακτικά για κάθε $x \in (0, 1)$ είναι $x^2 > 0$ και $0 < x < 1$ οπότε $x \cdot x^2 < 1 \cdot x^2$ δηλαδή $x^3 < x^2$.

γ) Με βάση τα παραπάνω για κάθε $x \in (0,1)$ είναι $x^3 < x^2$, π.χ. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$ αφού

ισοδύναμα $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$. Συνεπώς δεν είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του.

δ)

i. Αφού $3 < \pi < 4$ είναι $3-3 < \pi-3 < 4-3$ δηλαδή $0 < \pi-3 < 1$ οπότε με βάση το

β) ερώτημα είναι $(\pi-3)^3 < (\pi-3)^2$.

ii. Είναι

$$\begin{aligned}(\pi-3)^3 &< (\pi-3)^2 \Leftrightarrow \\ \pi^3 - 9\pi^2 + 27\pi - 27 &< \pi^2 - 6\pi + 9 \Leftrightarrow \\ \pi^3 - 10\pi^2 + 33\pi - 36 &< 0\end{aligned}$$

Θέμα 4.8

α) Οι τετμημένες των σημείων A,B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^4 = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0. \text{ Θέτουμε } x^2 = \omega$$

και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B, το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1.

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε A(-1,1).

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε B(1,1).

Αφού Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα y'y, το σημείο Γ θα έχει τετμημένη 0 και τεταγμένη $g(0) = 2$, οπότε Γ(0,2).

β) Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A,B δηλαδή για $x \in (-1,1)$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < g(x) \Leftrightarrow x^4 < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 < 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η ανίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και $\alpha = 1 > 0$ οπότε γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$ και άρα $-2 < x^2 < 1$. Όμως η ανίσωση $-2 < x^2$ αληθεύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο β) ερώτημα.

Θέμα 4.9

α) Οι τετμημένες των σημείων A, B είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow |x| = 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 = 0.$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$.

Για $\omega = -2$ έχουμε $|x| = -2$ που είναι αδύνατο.

Για $\omega = 1$ έχουμε $|x| = 1$ οπότε $x = 1$ ή $x = -1$.

Επειδή το σημείο A βρίσκεται πιο αριστερά από το B , το σημείο A θα έχει μικρότερη τετμημένη, οπότε η τετμημένη του σημείου A είναι -1 και η τετμημένη του σημείου B είναι 1 .

Για $x = -1$ είναι $f(-1) = 1$ οπότε $A(-1, 1)$.

Για $x = 1$ είναι $f(1) = 1$ οπότε $B(1, 1)$.

β)

ι. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ αληθεύει για τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g . Με βάση το σχήμα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , για τις τιμές του x που είναι μεταξύ των τετμημένων των σημείων A, B δηλαδή για $x \in (-1, 1)$.

ii.

Έχουμε

ισοδύναμα:

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow |x| < 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + |x| - 2 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| - 2 < 0.$$

Θέτουμε $|x| = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 < 0$. Το τριώνυμο $\omega^2 + \omega - 2$ έχει ρίζες τις $\omega = 1$ ή $\omega = -2$ και γίνεται αρνητικό για τις τιμές του ω που είναι μεταξύ των ριζών του, δηλαδή για $-2 < \omega < 1$, δηλαδή $-2 < |x| < 1$.

Όμως η ανίσωση $-2 < |x|$ ισχύει για κάθε πραγματική τιμή του x , οπότε πρέπει και αρκεί $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$ που επαληθεύει την απάντηση στο βι) ερώτημα.