

Μάθημα 17ο - Ιδιότητες διάταξης - εφαρμογές

Θέμα 8^ο Τοποθετήστε το κατάλληλο σύμβολο $<$, $>$, $=$, $\leq$, $\geq$ στα παρακάτω κουτάκια

1. Αν $x < 2$ τότε $-2x$ -4	6. Αν $x < 3$ και $y \leq 2$ τότε $x+y$ 5
2. Αν $x \leq -3$ τότε $2x$ -6	7. Αν $x > 3$ και $y \geq 2$ τότε xy 6
3. Αν $2 < x < 4$ τότε $\frac{1}{2} \frac{1}{x} \frac{1}{4}$	8. Αν $x > 3$ και $y < 2$ τότε $x-y$ 1
4. Αν $x < -2$ τότε x^2 4	9. Αν $x < 3$ και $y \geq 2$ τότε $y-x$ -1
5. Αν $x < -2$ τότε x^3 -8	10. Αν $x < 3$ και $y \geq 2$ τότε $\frac{x}{y}$ $\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{l} 8) \quad y < 2 \\ -y > -2 \\ \underline{x > 3 \quad +} \\ x - y > 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 9) \quad x < 3 \\ -x > -3 \\ \underline{y \geq 2 \quad (+)} \\ y - x > -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10) \quad x < 3 \xrightarrow{y > 0} \frac{x}{y} < \frac{3}{y} \\ y \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\cdot 3} \frac{3}{y} \leq \frac{3}{2} \\ \text{Αρα } \frac{x}{y} < \frac{3}{y} \leq \frac{3}{2} \end{array}$$

2^ο περίπτωση

$$\begin{array}{l} y \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} \\ \text{Αν } 0 < x < 3 \quad \text{τότε } \frac{x}{y} < \frac{3}{2} \\ \text{Αν } x \leq 0 \quad \text{τότε } \frac{x}{y} \leq 0 < \frac{3}{2} \end{array}$$

Θέμα 2^ο Αν $1 \leq x < 3$ και $2 < y \leq 4$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων

περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις

α) $-2x + 3$, β) $3y - 2$, γ) $x + y$, δ) $x - y$, ε) $2x - 3y$ στ) xy , ζ) $\frac{y}{x}$, η) $\frac{x}{y}$, θ) x^2 , ι) y^3

Λύση

$$\begin{array}{l} \alpha) \quad 1 \leq x < 3 \xrightarrow{\cdot (-2)} \\ -2 \geq -2x > -6 \xrightarrow{+3} \\ -2 + 3 \geq -2x + 3 > -6 + 3 \Rightarrow \\ \boxed{1 \geq -2x + 3 > -3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta) \quad 2 < y \leq 4 \xrightarrow{\cdot 3} \\ 6 < 3y \leq 12 \xrightarrow{+(-2)} \\ 6 + (-2) < 3y + (-2) \leq 12 + (-2) \Rightarrow \\ \boxed{4 < 3y - 2 \leq 10} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \gamma) \quad 1 \leq x < 3 \\ 2 < y \leq 4 \quad (+) \\ \hline 3 < x + y < 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \delta) \quad x - y = x + (-y) \\ 2 < y \leq 4 \xrightarrow{\cdot (-1)} \\ -2 > -y \geq -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \leq x < 3 \\ -4 \leq -y < -2 \quad (+) \\ \hline 1 + (-4) \leq x + (-y) < 3 + (-2) \Rightarrow \\ \boxed{-3 \leq x - y < 1} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \epsilon) \quad 1 \leq x < 3 \\ 2 < y \leq 4 \quad (\times) \\ \hline 2 < xy < 12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \epsilon) \quad 2x - 3y = 2x + (-3y) \\ 1 \leq x < 3 \xrightarrow{\cdot 2} \quad 2 \leq 2x < 6 \\ 2 < y \leq 4 \xrightarrow{\cdot (-3)} \quad -6 > -3y \geq -12 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \leq 2x < 6 \\ -12 \leq -3y < -6 \quad (+) \\ \hline -10 \leq 2x - 3y < 0 \end{array}$$

$$1 \leq x < 3 \Rightarrow 2 \leq 2x < 6$$

$$2 < \psi \leq 4 \xrightarrow{(-3)} -6 > -3\psi \geq -12$$

$$\underline{-10 \leq 2x - 3\psi < 0}$$

$$3) \frac{\psi}{x} = \psi \cdot \frac{1}{x}$$

$$1 \leq x < 3 \Rightarrow \frac{1}{1} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{3}$$

$$2 < \psi \leq 4$$

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{x} \leq 1 \quad (*)$$

$$\underline{\frac{2}{3} < \frac{\psi}{x} \leq 4}$$

$$4) \frac{x}{\psi} = x \cdot \frac{1}{\psi}$$

$$2 < \psi \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{\psi} \geq \frac{1}{4}$$

$$1 \leq x < 3$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{\psi} < \frac{1}{2} \quad (*)$$

$$\underline{\frac{1}{4} \leq \frac{x}{\psi} < \frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{θ)} \quad 1 &\leq x < 3 \\ 1^2 &\leq x^2 < 3^2 \\ 1 &\leq x < 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ι)} \quad 2 &< \psi \leq 4 \\ 2^3 &< \psi^3 \leq 4^3 \\ 8 &< \psi^3 \leq 64 \end{aligned}$$

Θέμα 5ο Να αποδείξετε ότι αν $\alpha < \beta$ και $0 < \gamma < \delta$ τότε $\alpha + \frac{1}{\delta} < \beta + \frac{1}{\gamma}$

$$0 < \gamma < \delta \Rightarrow \frac{1}{\delta} > \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\gamma} \\ \alpha < \beta \end{array} \right\} \xrightarrow{(+)} \alpha + \frac{1}{\delta} < \beta + \frac{1}{\gamma}$$

Θέμα 3ο Αν $-3 \leq x < -1$ και $-4 < \psi \leq -2$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων

περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις α) $2x - 3\psi$, β) $x\psi$, γ) $\frac{\psi}{x}$, δ) $x^2 - \psi^3$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{α)} \quad -3 &\leq x < -1 \xrightarrow{\cdot 2} -6 \leq 2x < -2 \\ -4 &< \psi \leq -2 \xrightarrow{(-3)} 12 > -3\psi \geq 6 \end{aligned}$$

$$-6 \leq 2x < -2$$

$$6 \leq -3\psi < 12 \quad (+)$$

$$\underline{0 \leq 2x - 3\psi < 10}$$

$$\text{β)} \quad \begin{array}{l} -3 \leq x < -1 \\ -4 < \psi \leq -2 \end{array} \xrightarrow{(*)} \boxed{12 > x\psi > 2}$$

$$\text{γ)} \quad -3 \leq x < -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x} > -1$$

$$\begin{array}{l} -4 < \psi \leq -2 \\ -1 < \frac{1}{x} \leq -\frac{1}{3} \end{array} \xrightarrow{(*)} 4 > \frac{\psi}{x} \geq \frac{2}{3}$$

$$\delta) \quad -3 \leq x < -1 \\ (-3)^2 \geq x^2 > (-1)^2 \\ 9 \geq x^2 > 1$$

$$-4 < \psi \leq -2 \\ (-4)^3 < \psi^3 \leq (-2)^3 \\ -64 < \psi^3 \leq -8 \xRightarrow{(-1)} \\ 64 > -\psi^3 \geq 8$$

$$9 \geq x^2 > 1 \\ 64 > -\psi^3 \geq 8 \quad (+) \\ \hline 73 > x^2 - \psi^3 > 9$$

Θέμα 4^ο

Αν $1 \leq x < 3$ και $-4 < \psi \leq -2$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η

τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις α) $x\psi$, β) $\frac{\psi}{x}$, γ) $x^2 + \psi^2$

Λύση

$$a) \quad -4 < \psi \leq -2 \xRightarrow{(-1)} 4 > -\psi \geq 2 \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \leq -\psi < 4 \\ 1 \leq x < 3 \end{array} \left| \begin{array}{l} (x) \\ (-1) \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \leq -x\psi < 12 \\ -2 \geq x\psi > -12 \end{array}$$

$$b) \quad \begin{array}{l} 1 \leq x < 3 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{3} \\ -4 < \psi \leq -2 \xRightarrow{(-1)} 4 > -\psi \geq 2 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1 \leq x < 3 \\ -4 < \psi \leq -2 \end{array}} \right\} \xRightarrow{(x)} 4 > -\frac{\psi}{x} \geq \frac{2}{3} \xRightarrow{(-1)} -4 < \frac{\psi}{x} < -\frac{2}{3}$$

$$\gamma) \quad \begin{array}{l} 1 \leq x < 3 \Rightarrow 1 \leq x^2 < 9 \\ -4 < \psi \leq -2 \Rightarrow 16 > \psi^2 \geq 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \leq x^2 < 9 \\ 4 \leq \psi^2 < 16 \\ \hline 5 \leq x^2 + \psi^2 < 25 \end{array}$$