$\lvert\alpha+\beta\rvert\le\lvert\alpha\rvert+\lvert\beta\rvert$	$\lvert\lvert\alpha\rvert-\lvert\beta\rvert\rvert\le\lvert\alpha+\beta\rvert$
; ισότητα ισχύει όταν α,β ομόσημοι ή α=0 ή β=0	Ως ισότητα ισχύει όταν α,β ετερόσημοι ή α=0 ή β=0
Απόδειξη	**Απόδειξη** Εντώ

$|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta| \Leftrightarrow$

$|\alpha+\beta|^2\le(|\alpha|+|\beta|)^2 \Leftrightarrow$

$(\alpha+\beta)^2\le|\alpha|^2+2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta+\cancel{\beta^2}\le\cancel{\alpha^2}+2|\alpha\beta|+\cancel{\beta^2} \Leftrightarrow$

$2\alpha\beta\le2|\alpha\beta| \overset{:2}{\Leftrightarrow}$

$\alpha\beta\le|\alpha\beta|$ που ισχύει

Ως ισότητα ισχύει όταν

$\alpha\beta=|\alpha\beta| \Leftrightarrow$

$\alpha\beta\ge0 \Leftrightarrow$

α, β ομόσημοι ή α=0 ή β=0

$||\alpha|-|\beta||\le|\alpha+\beta| \Leftrightarrow ||\alpha|-|\beta||^2\le|\alpha+\beta|^2 \Leftrightarrow$

$(|\alpha|-|\beta|)^2\le(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow$

$|\alpha|^2-2|\alpha||\beta|+|\beta|^2\le\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{\alpha^2}-2|\alpha\beta|+\cancel{\beta^2}\le\cancel{\alpha^2}+2\alpha\beta+\cancel{\beta^2} \Leftrightarrow$

$-2|\alpha\beta|\le2\alpha\beta \overset{:(-2)}{\Leftrightarrow}$

$|\alpha\beta|\ge-\alpha\beta$ που ισχύει

Ως ισότητα ισχύει όταν

$|\alpha\beta|=-\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta\le0 \Leftrightarrow$

α, β ετερόσημοι ή α=0 ή β=0

$\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu\rvert=\lvert\alpha_1\rvert\cdot\lvert\alpha_2\rvert\cdot\ldots\cdot\lvert\alpha_\nu\rvert$	$\lvert\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu\rvert\le\lvert\alpha_1\rvert+\lvert\alpha_2\rvert+\ldots+\lvert\alpha_\nu\rvert$	$\lvert\alpha^\nu\rvert=\lvert\alpha\rvert^\nu$

Παρατήρηση : Πολλές φορές είναι αναγκαίο να διώξουμε την απόλυτη τιμή.
Αυτό το κατορθώνουμε (ανάλογα με την περίπτωση)

1) με την ιδιότητα $|\alpha|^2=\alpha^2$

2) διακρίνοντας περιπτώσεις $|\alpha|=\alpha$ αν $\alpha\ge0$ και $|\alpha|=-\alpha$ αν $\alpha<0$.

Θέμα 1° Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με Σ - Λ

1. $|\alpha|^{2\nu}=\alpha^{2\nu}$ όπου ν φυσικός Σ $\quad |\alpha|^{2\nu}=(|\alpha|^2)^\nu=(\alpha^2)^\nu=\alpha^{2\nu}$
2. $|\alpha|^{2\nu+1}=\alpha^{2\nu+1}$, αν α>0 όπου ν φυσικός Σ $\quad \alpha>0\Rightarrow|\alpha|=\alpha\Rightarrow|\alpha|^{2\nu+1}=\alpha^{2\nu+1}$
3. $|\alpha|^{2\nu+1}=-\alpha^{2\nu+1}$, αν α<0 όπου ν φυσικός Σ $\quad \alpha<0\Rightarrow|\alpha|=-\alpha\Rightarrow|\alpha|^{2\nu+1}=(-\alpha)^{2\nu+1}\Rightarrow|\alpha|^{2\nu+1}=-\alpha^{2\nu+1}$
4. $|\chi^3|=\chi^3$ για κάθε χ πραγματικό Λ $\quad$ π.χ $|(-2)^3|=|-8|=8$, $(-2)^3=-8$
5. $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ για κάθε α,β πραγματικούς Λ $\quad$ π.χ. $|-2+1|=|-1|=1$, $|-2|+|1|=2+1=3$
6. $-|\alpha|\le\alpha\le|\alpha|$ για κάθε α πραγματικό Σ
7. $|\alpha-|\alpha||+|\alpha+|\alpha||=2\cdot|\alpha|$ Σ

$\alpha\le|\alpha|\Rightarrow\alpha-|\alpha|\le0\Rightarrow|\alpha-|\alpha||=-\alpha+|\alpha|$

$$a \le |a| \Rightarrow a-|a| \le 0 \Rightarrow \big|a-|a|\big| = -a+|a|$$

$$-a \le |a| \Rightarrow a+|a| \ge 0 \Rightarrow \big|a+|a|\big| = a+|a|$$

οπότε $\big|a-|a|\big| + \big|a+|a|\big| = -a+|a|+a+|a| = 2|a|$

Θέμα 2ο Να αποδείξετε ότι $|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2=2(|\alpha|^2+|\beta|^2)$

1ο μέλος $= |a+b|^2 + |a-b|^2 = (a+b)^2 + (a-b)^2 =$

$= a^2 + \cancel{2ab} + b^2 + a^2 - \cancel{2ab} + b^2 = 2a^2 + 2b^2 = 2(a^2+b^2) = 2(|a|^2+|b|^2)$

Θέμα 3ο Να δείξετε ότι $|\alpha+\beta|=|\alpha-\beta| \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\beta=0$

$|a+b| = |a-b| \Leftrightarrow$

$a+b=a-b$ ή $a+b=-(a-b)$

$a+b-a+b=0$ | $a+b+a-b=0$

$2b=0$ | $2a=0$

$b=0$ | $a=0$

Θέμα 4ο Αν $\chi\in\Re$ και $|2\chi+9|=3|\chi+2|$ να δείξετε ότι $|\chi|=3$

$|2x+9| = 3|x+2| \Leftrightarrow$

$|2x+9| = |3|\,|x+2| \Leftrightarrow$

$|2x+9| = |3(x+2)| \Leftrightarrow$

$|2x+9| = |3x+6| \Leftrightarrow$

$2x+9=3x+6$ ή $2x+9=-3x-6$

$2x-3x=6-9$ | $2x+3x=-6-9$

$-x=-3$ | $5x=-15$

$x=3$ | $x=-3$

Συνεπώς $|x|=3$