

Μάθημα 28ο - Λύση επαναληπτικής εργασίας Απόλυτη τιμή - Διάταξη

Θέμα 1ο

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \leq \alpha \leq 3$ και $-2 \leq \beta \leq -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 2| = \alpha - 2$ και $|\beta + 1| = -\beta - 1$.

β) Να δείξετε ότι : $3 \leq \alpha - \beta \leq 5$.

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha - \beta| - |\alpha - 2| - |\beta + 1|$ είναι ίση με 3.

$$\begin{aligned} \alpha) \quad 2 \leq \alpha \leq 3 & \xrightarrow{+(-2)} 2-2 \leq \alpha-2 \leq 3-2 \Rightarrow 0 \leq \alpha-2 \leq 1 \Rightarrow |\alpha-2| = \alpha-2 \\ -2 \leq \beta \leq -1 & \xrightarrow{+1} -2+1 \leq \beta+1 \leq -1+1 \Rightarrow -1 \leq \beta+1 \leq 0 \Rightarrow |\beta+1| = -\beta-1 \end{aligned}$$

$$\beta) \quad \begin{array}{l} 2 \leq \alpha \leq 3 \\ -2 \leq \beta \leq -1 \end{array} \left| \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \geq \alpha \geq 2 \\ 2 \geq -\beta \geq 1 \end{array} \right| \xrightarrow{(+)} 5 \geq \alpha - \beta \geq 3 \Rightarrow |\alpha - \beta| = \alpha - \beta$$

$$\delta) \quad |\alpha - \beta| - |\alpha - 2| - |\beta + 1| = \alpha - \beta - (\alpha - 2) - (-\beta - 1) = \alpha - \beta - \alpha + 2 + \beta + 1 = 3$$

Θέμα 2ο

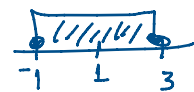
Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν αντίστοιχα $d(x, 1) \leq 2$ (1) και $d(y, 4) \leq 3$ (2).

α) Να γράψετε με τη μορφή διαστήματος το σύνολο των λύσεων της (1) και (2) αντίστοιχα .

β) Να δείξετε ότι $|x + y - 5| \leq 5$

γ) Να δείξετε ότι $|x - y + 3| \leq 5$

$$\alpha) \quad d(x, 1) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3 \quad \dot{\vee} \quad x \in [-1, 3]$$



$$d(y, 4) \leq 3 \Rightarrow 1 \leq y \leq 7 \quad \dot{\vee} \quad y \in [1, 7]$$



$$\beta) \quad \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 7 \end{array} \left| \xrightarrow{(+)} 0 \leq x + y \leq 10 \xrightarrow{+(-5)} -5 \leq x + y - 5 \leq 5 \Rightarrow |x + y - 5| \leq 5 \right.$$

$$\gamma) \quad \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 3 \\ 1 \leq y \leq 7 \end{array} \left| \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \geq x \geq -1 \\ -1 \geq -y \geq -7 \end{array} \right| \xrightarrow{(+)} 2 \geq x - y \geq -8 \xrightarrow{+3} 5 \geq x - y + 3 \geq -5 \Rightarrow |x - y + 3| \leq 5$$

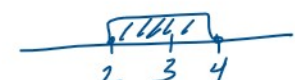
Θέμα 3ο

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν αντίστοιχα $d(x, 1) \leq 3$ (1) και $d(y, 3) \leq 1$ (2).

α) Να γράψετε με τη μορφή διαστήματος το σύνολο των λύσεων της (1) και (2) αντίστοιχα.

β) Να δείξετε ότι $|2x + 3y - 11| \leq 9$

γ) Να δείξετε ότι $|3x - 2y + 3| \leq 11$

α) $d(x, 1) \leq 3 \Rightarrow -2 \leq x \leq 4$ ή $x \in [-2, 4]$ 
 $d(y, 3) \leq 1 \Rightarrow 2 \leq y \leq 4$ ή $y \in [2, 4]$ 

β)
$$\begin{array}{l} -2 \leq x \leq 4 \xrightarrow{\cdot 2} -4 \leq 2x \leq 8 \\ 2 \leq y \leq 4 \xrightarrow{\cdot 3} 6 \leq 3y \leq 12 \end{array} \left| \begin{array}{l} (+) \\ \hline \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \leq 2x + 3y \leq 20 \\ -9 \leq 2x + 3y - 11 \leq 9 \end{array} \xrightarrow{+(-11)} \Rightarrow |2x + 3y - 11| \leq 9$$

γ)
$$\begin{array}{l} -2 \leq x \leq 4 \xrightarrow{\cdot 3} -6 \leq 3x \leq 12 \\ 2 \leq y \leq 4 \xrightarrow{\cdot (-2)} -4 \leq -2y \leq -8 \end{array} \left| \begin{array}{l} (+) \\ \hline \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} -6 \leq 3x \leq 12 \\ -8 \leq -2y \leq -4 \end{array} \xrightarrow{+3} \Rightarrow \begin{array}{l} -14 \leq 3x - 2y \leq 8 \\ -11 \leq 3x - 2y + 3 \leq 11 \end{array} \Rightarrow |3x - 2y + 3| \leq 11$$

Θέμα 4ο

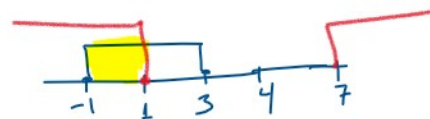
Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύουν $|x - 1| \leq 2$ (1) και $d(x, 4) \geq 3$ (2).

α) Να παραστήσετε στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) και να δείξετε ότι $x \in [-1, 1]$.

β) Δεδομένου ότι $x \in [-1, 1]$ να δείξετε ότι η παράσταση $|2x - 3| - |5 - 2x|$ είναι ίση με -2.

γ) Δεδομένου ότι $x \in [-1, 1]$ να δείξετε ότι $|2x + 1| \leq |x + 2|$.

α) $|x - 1| \leq 2 \Rightarrow d(x, 1) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 3$
 $d(x, 4) \geq 3 \Rightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 7$
Τελικά $x \in [-1, 1]$



β) $-1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\cdot 2} -2 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{+(-3)} -5 \leq 2x - 3 \leq -1 \Rightarrow |2x - 3| = -2x + 3$

$$\beta) \begin{aligned} -1 \leq x \leq 1 &\xrightarrow{\cdot 2} -2 \leq 2x \leq 2 \xrightarrow{+(-3)} -5 \leq 2x-3 \leq -1 \Rightarrow |2x-3| = -2x+3 \\ -1 \leq x \leq 1 &\xrightarrow{\cdot (-2)} 2 \geq -2x \geq -2 \xrightarrow{+5} 7 \geq 5-2x \geq 3 \Rightarrow |5-2x| = 5-2x \\ \text{οπότε } |2x-3| - |5-2x| &= -2x+3 - (5-2x) = -2x+3-5+2x = -2 \end{aligned}$$

$$\delta) |2x+1| \leq |x+2| \Rightarrow |2x+1|^2 \leq |x+2|^2 \Rightarrow (2x+1)^2 \leq (x+2)^2 \Rightarrow$$

$$4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x^2 - x^2 \leq 4 - 1 \Rightarrow 3x^2 \leq 3 \Rightarrow$$

$$x^2 \leq 1 \Rightarrow |x|^2 \leq 1 \Rightarrow |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \text{ που ισχύει}$$

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha-1)(1-\beta) > 0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β .

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = |\alpha-1| + |1-\beta|.$$

$$α) (\alpha-1)(1-\beta) > 0 \Rightarrow \alpha-1, 1-\beta \text{ ομοσημοί} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{ccc} \alpha-1 > 0 & \text{και} & 1-\beta > 0 \\ \alpha > 1 & & 1 > \beta \\ \alpha > 1 & & 1 > \beta \\ \alpha > 1 & & 1 > \beta \end{array} \quad \vee \quad \begin{array}{ccc} \alpha-1 < 0 & \text{και} & 1-\beta < 0 \\ \alpha < 1 & & 1 < \beta \\ \alpha < 1 & & 1 < \beta \\ \alpha < 1 & & 1 < \beta \end{array}$$

Σε κάθε περίπτωση το 1 είναι μεταξύ των α, β

$$\beta) \text{ 1η περίπτωση } \alpha > 1 > \beta \text{ τότε } |\alpha-1| = \alpha-1, |1-\beta| = 1-\beta$$

$$|\beta-\alpha| = 4 \Rightarrow \alpha-\beta = 4$$

$$\text{οπότε } K = \alpha-1 + 1-\beta = \alpha-\beta = 4$$

$$\text{2η περίπτωση } \alpha < 1 < \beta \text{ τότε } |\alpha-1| = -\alpha+1, |1-\beta| = -1+\beta$$

$$|\beta-\alpha| = 4 \Rightarrow \beta-\alpha = 4$$

$$\text{οπότε } K = -\alpha+1 + (-1+\beta) = \beta-\alpha = 4$$

Σε κάθε περίπτωση $K=4$

Αν α, β μεταβλητοί $|(\alpha-1) - 4|$

26. 2000

до 2000 / $k = |a-1| + |1-b| = d(a, 1) + d(1, b) \xrightarrow[\text{тр. } a, b]{\text{1. теор.}} d(a, b) = 4$

