

Θέμα 2ο

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει ότι $(\lambda+1)x^2+2x+\lambda-1>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\text{Αν } \lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda=-1 \quad \text{τότε} \quad 0x^2+2x-1-1>0$$

$$2x>2$$

$$x>1$$

οπότε δεν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και άρα $\lambda \neq -1$

Για $\lambda \neq -1$ τότε για να ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

πρέπει και αρκεί $\Delta < 0$ και $a > 0$

$$4-4(\lambda+1)(\lambda-1) < 0 \quad \lambda+1 > 0$$

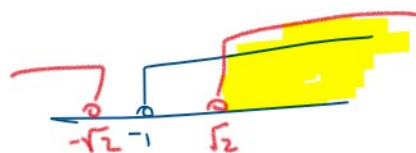
$$4-4(\lambda^2-1) < 0 \quad \lambda > -1$$

$$4-4\lambda^2+4 < 0$$

$$-4\lambda^2 < -8$$

$$\lambda^2 > 2$$

$$\lambda > \sqrt{2} \text{ ή } \lambda < -\sqrt{2}$$



$$\text{Τελικά } \lambda \in (\sqrt{2}, +\infty)$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6 < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ αιτιολογώντας την

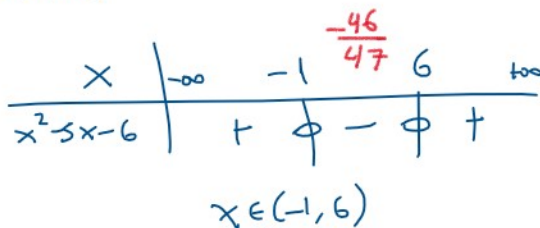
απάντηση γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης

$\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

$$\alpha) \quad x^2-5x-6 < 0$$

$$\Delta = 49$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 6$$



$$\text{Έστω } f(x) = x^2-5x-6$$

$$K = f\left(-\frac{46}{47}\right) < 0 \quad \text{αφού} \quad -\frac{46}{47} \in (-1, 6)$$

$$\Lambda = f(|\alpha|) < 0$$

αφού $\alpha \in (-6, 6) \Rightarrow -6 < \alpha < 6 \Rightarrow |\alpha| < 6$
και επειδή $|\alpha| \geq 0 > -1$ είναι

$$|\alpha| \in (-1, 6)$$

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α) $\Delta = k^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = k^2 + 48 > 0$ για κάθε $k \in \mathbb{R}$ οπότε
έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες

β) $p = -\frac{4}{3} \Rightarrow$ ρίζες ετερόσημες

δ) Είναι $\alpha < x_1 < x_2 < \beta$
και x_1, x_2 ετερόσημοι $\rightarrow \alpha < x_1 < 0 < x_2 < \beta$

x	α	x_1	0	x_2	β
$f(x)$		+	-	+	

$f(\alpha) > 0$
 $f(\beta) > 0$
 $\alpha < 0$
 $\beta > 0$
 $\rightarrow \alpha f(\alpha) \beta \cdot f(\beta) < 0$

ΘΕΜΑ 5ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002).$$

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $- \alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

α) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$
 $\Delta > 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$	$-$

$f(x) > 0$ για $x \in (-1, 3)$
 $f(x) < 0$ για $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

δ) $-3 < \alpha < 3 \Rightarrow$
 $|\alpha| < 3$
και επίσης $|\alpha| > -1$
είναι $|\alpha| \in (-1, 3)$

β) $f(2,999) > 0$ αφού $2,999 \in (-1, 3)$
 $f(-1,002) < 0$ αφού $-1,002 \in (-\infty, -1)$

Συνεπώς $f(2,999) \cdot f(-1,002) < 0$

οπότε $f(|\alpha|) > 0 \Rightarrow -|\alpha|^2 + 2|\alpha| + 3 > 0 \Rightarrow -\alpha^2 + 2|\alpha| + 3 > 0$

ΘΕΜΑ 6ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου

$\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

$$\begin{aligned} \text{ο) } \Delta &= (-6)^2 - 4 \cdot (\lambda - 3) = \\ &= 36 - 4\lambda + 12 = 48 - 4\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ε) } \text{Πρόσημα και αρκία} \\ \Delta > 0 \Leftrightarrow 48 - 4\lambda > 0 \Leftrightarrow \\ -4\lambda > -48 \Leftrightarrow \boxed{\lambda < 12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{δ) } 3 < \lambda < 12 \\ \lambda < 12 \Rightarrow \Delta > 0 \\ \lambda > 3 \Rightarrow \lambda - 3 > 0 \Rightarrow f > 0 \\ 5 = 6 > 0 \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \lambda < 12 \\ \lambda > 3 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} 2 \\ \text{άνισες} \\ \text{θετικές} \\ \text{ρίζες} \end{array}$$

$$\kappa < 0 < x_1 < \mu < x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\kappa) > 0 \\ f(\mu) < 0 \\ \kappa < 0 \\ \mu > 0 \end{array} \right\} \kappa f(\kappa) \mu f(\mu) > 0$$

x	$-\infty$	κ	x_1	μ	x_2	$+\infty$
$f(x)$		+	0	-	0	+
			$f(\kappa) > 0$		$f(\mu) < 0$	

ΘΕΜΑ 7ο

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - 2x - 8 = f(x)$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x .

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\begin{aligned} \text{Έστω } f(x) &= x^2 - 2x - 8 \\ \Delta &> 0, x_1 = 4, x_2 = -2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	κ	-2	4	$+\infty$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

$$\beta) \kappa = -\frac{8889}{4444} < -2 \Rightarrow f(\kappa) > 0 \Rightarrow \kappa^2 - 2\kappa - 8 > 0$$

$$\begin{aligned} \gamma) -4 < \mu < 4 \Rightarrow |\mu| < 4 \text{ και επειδή } |\mu| \geq 0 > -2 \text{ είναι } |\mu| \in (-2, 4) \\ \text{οπότε } f(|\mu|) < 0 \Rightarrow |\mu|^2 - 2|\mu| - 8 < 0 \Rightarrow \\ \mu^2 - 2|\mu| - 8 < 0 \end{aligned}$$