

Απαντήσεις Εργασίας 5 - Συμμετρίες συνάρτησης

Θέμα 1°

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2|x|-6}$$

$$\text{Πρέπει } x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{και } 2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3.$$

$$\text{Τελικά } A = (-\infty, -3) \cup (-3, -1] \cup [1, 3) \cup (3, +\infty) \text{ οπότε για κάθε } x \in A \text{ και } -x \in A.$$

$$\text{Επίσης για κάθε } x \in A \text{ είναι } f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{2|-x|-6} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2|x|-6} = f(x)$$

και άρα f άρτια.

$$\beta) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{2-x}}$$

$$\text{Πρέπει } x+2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2 \text{ και } 2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2 \setminus$$

$$\text{Τελικά } A = [-2, 2) \text{ και επειδή } -2 \in A \text{ ενώ } 2 \notin A \text{ δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-2|x|}}$$

$$\text{Πρέπει } x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\text{και } 4-2|x| > 0 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

$$\text{Τελικά } A = (-2, -1] \cup [1, 2) \text{ οπότε για κάθε } x \in A \text{ και } -x \in A.$$

$$\text{Επίσης για κάθε } x \in A \text{ είναι } f(-x) = \frac{-x + \sqrt{(-x)^2-1}}{\sqrt{4-2|-x|}} = \frac{-x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{4-2|x|}} \neq \begin{cases} f(x) \\ \text{και} \\ -f(x) \end{cases}$$

και άρα f ούτε άρτια ούτε περιττή.

$$\delta) f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^3-4x}$$

$$\text{Πρέπει } 9-x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 9 \Leftrightarrow |x| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3, 3]$$

$$\text{και } x^3-4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2-4) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2 \text{ και } x \neq 0.$$

$$\text{Τελικά } A = (-3, -2] \cup (-2, 0) \cup (0, 2) \cup [2, 3) \text{ οπότε για κάθε } x \in A \text{ και } -x \in A.$$

$$\text{Επίσης για κάθε } x \in A \text{ είναι } f(-x) = \frac{\sqrt{9-(-x)^2}}{(-x)^3-4(-x)} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{-x^3+4x} = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^3-4x} = -f(x)$$

και άρα f περιττή.

Θέμα 2^ο

Αφού είναι περιττή θα πρέπει το πεδίο ορισμού $(\alpha, 5)$ να είναι συμμετρικό ως προς το 0 που σημαίνει ότι $\alpha = -5$.

Επίσης αφού είναι περιττή θα πρέπει κάθε $x \in A$ να ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$

Οπότε για $x=0$ είναι $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

και για $x=2$ είναι $f(-2) = -f(2) \Leftrightarrow f(-2) + f(2) = 0$

Τελικά $f(-2) + f(2) + f(0) + \alpha = 0 + 0 - 5 = -5$.

Θέμα 3ο

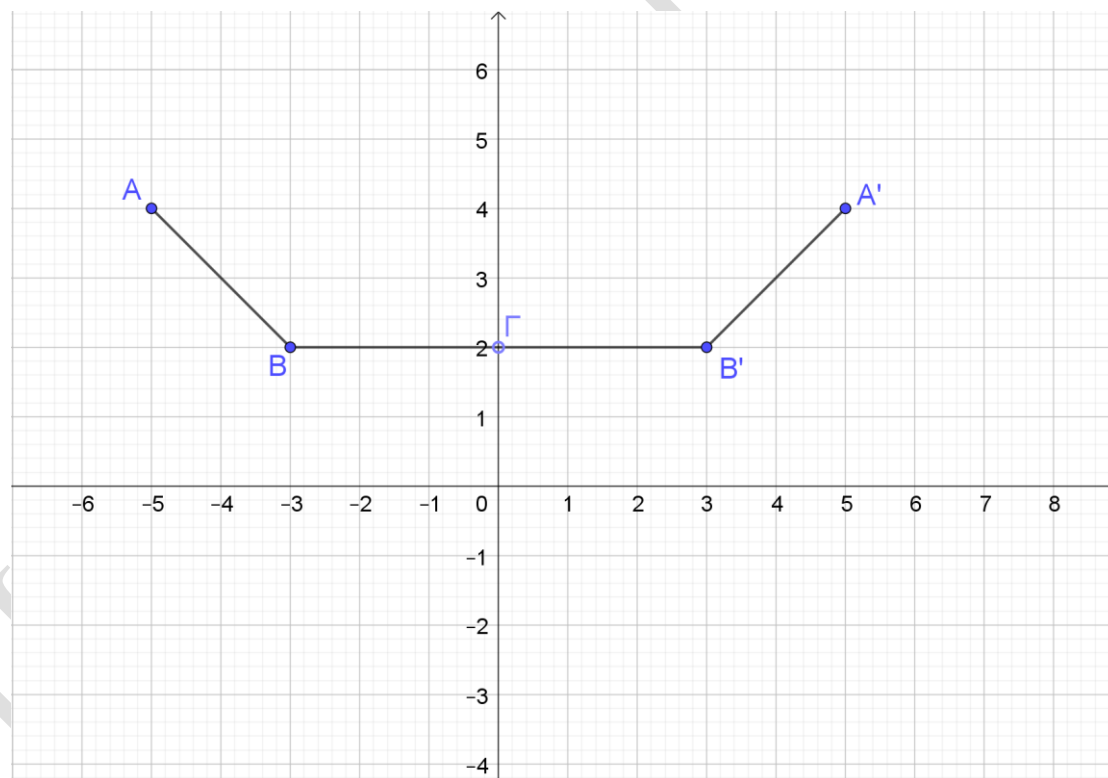
Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(2, 5)$ θα πρέπει $f(2) = 5$

Αφού είναι περιττή θα πρέπει κάθε $x \in A$ να ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$

οπότε για $x=2$ είναι $f(-2) = -f(2) \Leftrightarrow f(-2) = -5$

Θέμα 4^ο

α) Αν είναι άρτια τότε η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



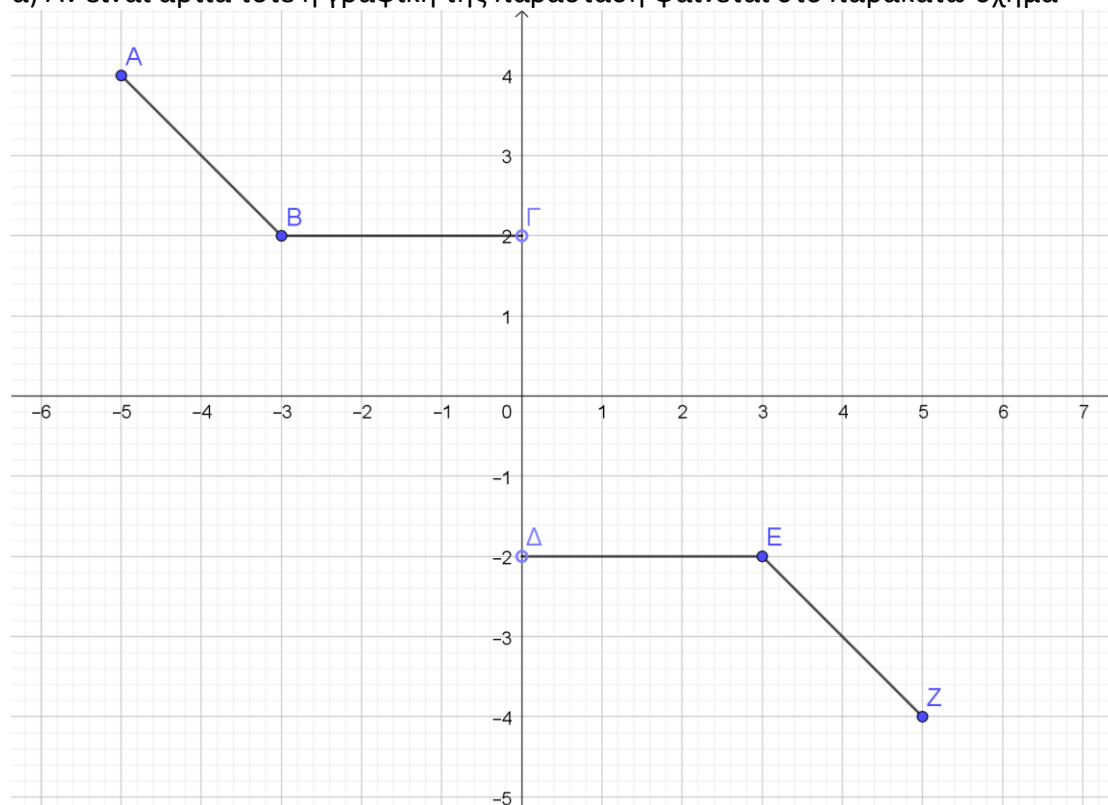
$$f(-5) = f(5) = 4,$$

$$f(-2) = f(2) = 2$$

$$f(x) = 3 \Leftrightarrow x = \pm 4$$

$$f(x) > 3 \Leftrightarrow x \in [-5, -4) \cup (4, 5]$$

α) Αν είναι άρτια τότε η γραφική της παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



$$\begin{aligned} f(-5) &= 4, \quad f(5) = -4, \\ f(-2) &= 2, \quad f(2) = -2 \\ f(x) &= 3 \Leftrightarrow x = -4 \\ f(x) &> 3 \Leftrightarrow x \in [-5, -4) \end{aligned}$$

Θέμα 5^ο

1. Σωστό αφού το -2 ανήκει στο πεδίο ορισμού ενώ το 2 όχι.
2. Λάθος έχει κέντρο συμμετρίας το (0,0).
3. Σωστό, αφού είναι περιττή θα πρέπει κάθε $x \in A$ να ισχύει ότι $f(-x) = -f(x)$
οπότε για $x = 0$ είναι $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow 2f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$