

Απαντήσεις Φύλλου εργασίας 5

Θέμα 1ο

Πρέπει $\chi \neq 0$ και $\psi \neq 0$.

Θέτουμε $\frac{1}{\chi} = \omega$ και $\frac{1}{\psi} = \phi$ και το σύστημα γίνεται : $\begin{cases} 2\omega + 3\phi = 5 \\ -3\omega + 4\phi = 1 \end{cases}$

Λύνουμε το τελευταίο σύστημα κατά τα γνωστά και βρίσκουμε ότι $\omega = 1$ και $\phi = 1$.

Έτσι $\frac{1}{\chi} = 1$ δηλ. $\chi = 1$ και $\frac{1}{\psi} = 1$ δηλ. $\psi = 1$. Η λύση είναι η **(1,1)**.

Θέμα 2ο

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\chi-2} + \frac{3}{\psi-3} = 5 \\ -\frac{3}{\chi-2} - \frac{4}{3-\psi} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{\chi-2} + \frac{3}{\psi-3} = 5 \\ -\frac{3}{\chi-2} + \frac{4}{\psi-3} = 1 \end{array} \right\}$$

Πρέπει $\chi \neq 2$ και $\psi \neq 3$.

Θέτουμε $\frac{1}{\chi-2} = \omega$ και $\frac{1}{\psi-3} = \phi$ και το σύστημα γίνεται : $\begin{cases} 2\omega + 3\phi = 5 \\ -3\omega + 4\phi = 1 \end{cases}$

Λύνουμε το τελευταίο σύστημα κατά τα γνωστά και βρίσκουμε ότι $\omega = 1$ και $\phi = 1$.

Έτσι $\frac{1}{\chi-2} = 1$ δηλ. $\chi-2=1$ δηλ. $\chi=3$ και

$\frac{1}{\psi-3} = 1$ δηλ. $\psi-3=1$ δηλ. $\psi=4$. Η λύση είναι η **(3,4)**.

Θέμα 3ο Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 5 \\ 3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 7 \end{cases}$

Καταρχήν πρέπει $x \geq 0, y \geq 0$. Θέτω $\sqrt{x} = \omega$, $\sqrt{y} = \phi$ και το σύστημα

$$\text{γίνεται : } \begin{cases} 2\omega + 3\phi = 5 \\ 3\omega + 5\phi = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6\omega + 9\phi = 15 \\ -6\omega - 10\phi = -14 \end{cases} \xrightarrow{+} -\phi = 1 \Rightarrow \phi = -1$$

Όμως $\sqrt{y} = \phi \Rightarrow \sqrt{y} = -1$ πράγμα αδύνατο, οπότε και το σύστημα είναι αδύνατο.

Θέμα 4ο

Θέτω $x^2 = \omega$, $y^3 = \phi$ και το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 3\omega - \phi = 4 \\ \omega - \phi = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\omega = 8 \\ \omega = 4 \end{cases} \text{ και } \phi = 8$$

Για $\omega = 4$ έχουμε $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ και για $\phi = 8$ έχουμε $y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$

Συνεπώς το σύστημα έχει 2 λύσεις , τις $(2, 2), (-2, 2)$

Θέμα 5ο

Θέτω $|x| = \omega$, $|y| = \phi$ και το σύστημα γίνεται :

$$\begin{cases} 4\omega - 2\phi = 11 \\ 6\omega - 5\phi = 15,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12\omega - 6\phi = 33 \\ -12\omega + 10\phi = -31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\phi = 2 \\ \phi = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ και } \omega = 3$$

Για $\omega = 3$ έχουμε ότι $|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$ και για $\phi = \frac{1}{2}$ έχουμε $|y| = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$

Τελικά το σύστημα έχει 4 λύσεις τις : $(3, \frac{1}{2}), (3, -\frac{1}{2}), (-3, \frac{1}{2}), (-3, -\frac{1}{2})$

Θέμα 6ο

$$\begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ |x - y| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - y = 4 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 3x + 2y = 14 \\ x - y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{22}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \frac{6}{5} \\ y = \frac{26}{5} \end{cases}$$

Συνεπώς το σύστημα έχει δύο λύσεις , τις $(\frac{22}{5}, \frac{2}{5}), (\frac{6}{5}, \frac{26}{5})$

Θέμα 7ο

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ (x - y)(x + y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 6 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x - 3y = 6 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = 6 \\ x - y = 0 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x - 3y = 6 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 3y = 6 \\ x = y \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x - 3y = 6 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = 6 \\ x = y \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} 4x = 6 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Συνεπώς το σύστημα έχει δύο λύσεις τις $(-3, -3)$, $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

Θέμα 8ο

$$\begin{cases} 2xy - y^2 - 5y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x - y - 5) = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \quad \text{ή} \quad 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y = x^2 - 4x + 3 \end{cases}$$

Από το 1ο σύστημα έχουμε ότι $y = 0$ και $x^2 - 4x + 3 = 0$ που έχει ρίζες 1 και 3

οπότε από το 1ο σύστημα έχουμε λύσεις (1,0) και (3,0).

Από το 2ο σύστημα έχουμε ότι $2x - (x^2 - 4x + 3) - 5 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 8 = 0$ που έχει

ρίζες 2 και 4 οπότε από το 2ο σύστημα έχουμε λύσεις (2,-1) και (4,3).

Συνεπώς το αρχικό σύστημα έχει 4 λύσεις όσα και τα κοινά σημεία Α,Β,Γ,Δ της

παραβολής $y = x^2 - 4x + 3$ με τις ευθείες $y = 0$ (xχ') και $2x - y - 5 = 0$, όπως φαίνεται

στο παρακάτω σχήμα.

