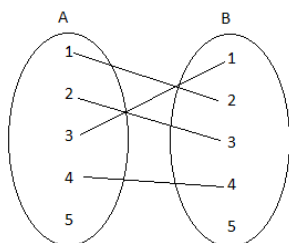


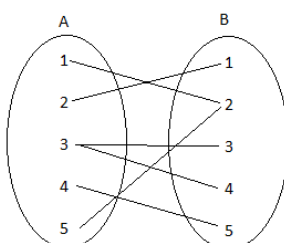
Απαντήσεις Φύλλου εργασίας 6

ΘΕΜΑ 1ο

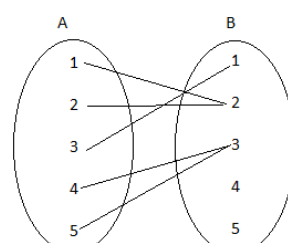
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο A σε ένα σύνολο B.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το A στο B ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B.

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f ,

- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f .
- Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών $f(A)$ της συνάρτησης f .
- Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f(2)$

Λύση

α) Η αντιστοίχιση του Σχήματος 1 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι το 5 του συνόλου A δεν αντιστοιχίζεται σε κάποιο στοιχείο του B.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 2 δεν παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι το 3 του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε δύο στοιχεία του συνόλου B.

Η αντιστοίχιση του Σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το A στο B διότι κάθε στοιχείο του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου B.

β)

- Το πεδίο ορισμού είναι το $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
- Το σύνολο τιμών είναι το $f(A) = \{1, 2, 3\}$.
- Είναι $f(1) = f(2) = 2$.

Θέμα 2^ο Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x - 2}}{2|x| - 6}$$

Πρέπει $x^2 - x - 2 \geq 0$ και $2|x| - 6 \neq 0$.

Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει ρίζες -1 και 2 και γίνεται θετικό δηλαδή ομόσημο του $a=1$ για τις τιμές του x εκτός του διαστήματος των ριζών, δηλαδή για $x \leq -1$ ή $x \geq 2$.

$$2|x| - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 2|x| \neq 6 \Leftrightarrow |x| \neq 3 \Leftrightarrow x \neq \pm 3$$

Τελικά το πεδίο ορισμό είναι το $A = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty) - \{-3, 3\}$.

$$\beta) f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{3-x}}$$

Πρέπει $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ και $3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$.

Τελικά το πεδίο ορισμό είναι το $A = [2, 3)$.

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{4 - 2|x|}}$$

Πρέπει $x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{1} \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$ ή $x \leq -1$ και

$$4 - 2|x| > 0 \Leftrightarrow 2|x| < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Τελικά το πεδίο ορισμό είναι το $A = (-2, -1] \cup [1, 2)$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .

β) Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 + x^2 + 1$ για κάθε $x \in A$.

γ) Να εξετάσετε αν το 3 ανήκει στο σύνολο τιμών $f(A)$.

ΛΥΣΗ

α) Για να ορίζεται η συνάρτηση f πρέπει και αρκεί

$$x^3 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ \text{και} \\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm 1 \end{cases}.$$

Συνεπώς το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο

$$A = \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty).$$

β) Επειδή το $0 \notin A$ η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $y'y$.

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x \in A$.

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^7 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^6 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x^6 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^6 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1 \end{cases}.$$

Επειδή $0 \notin A$, $-1 \notin A$, $1 \notin A$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο σύνολο A και επομένως η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινό σημείο με τον $x'x$.

$$\gamma) \text{ Είναι } f(x) = \frac{x^7 - x}{x^3 - x} = \frac{x(x^6 - 1)}{x(x^2 - 1)} = \frac{(x^2)^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)}{x^2 - 1} = x^4 + x^2 + 1 \text{ για}$$

κάθε $x \in A$.

δ) Είναι $f(x) = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0$. Θέτουμε $x^2 = \omega$ και η εξίσωση γίνεται $\omega^2 + \omega - 2 = 0$ που έχει ρίζες τις $\omega = 1$, $\omega = -2$ αφού $S = -\frac{\beta}{\alpha} = -1$ και

$$P = \frac{\gamma}{\alpha} = -2.$$

Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ που όμως δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού A .

Για $\omega = -2$ έχουμε $x^2 = -2$ που είναι αδύνατη.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 3$ δεν έχει λύση στο σύνολο A και επομένως το 3 δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f .