

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

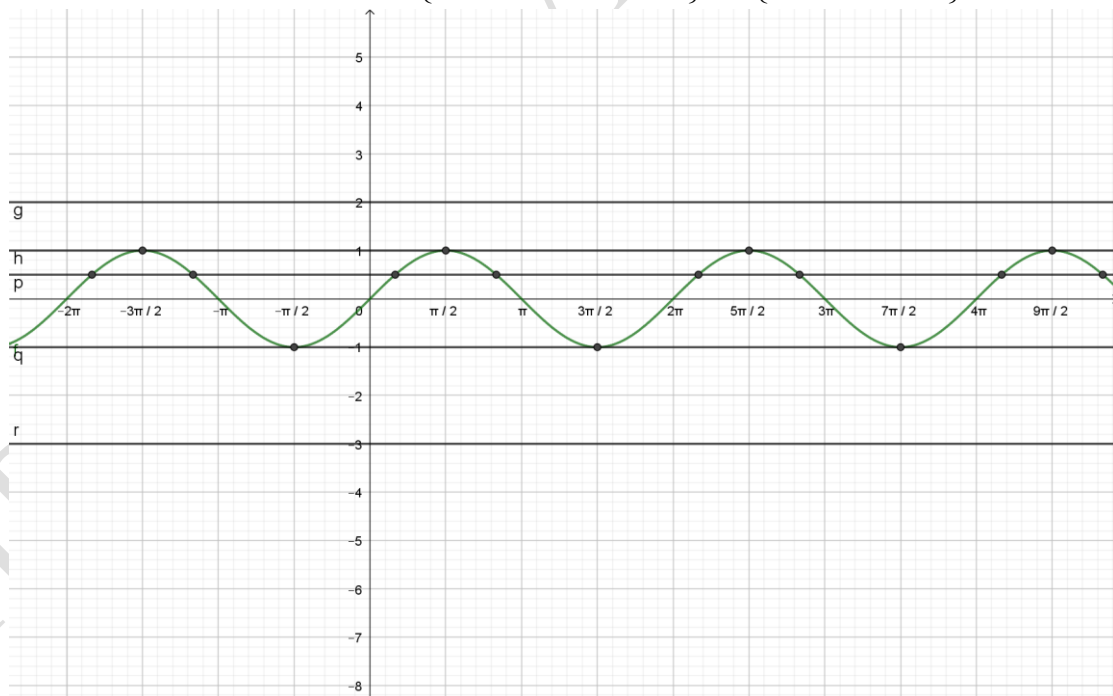
- Λύση της εξίσωσης $\eta\mu\chi = \alpha$.

1. Αν $\alpha > 1$ ή $\alpha < -1$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $-1 \leq \eta\mu\chi \leq 1$ για κάθε χ

2. Αν $\alpha \in [-1, 1]$ τότε αναζητούμε γωνία $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοια ώστε $\eta\mu\theta = \alpha$
 οπότε η εξίσωση γίνεται : $\eta\mu\chi = \eta\mu\theta$ και έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta \\ \eta' \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{Π.χ } \eta\mu\chi = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \eta' \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \\ \eta' \\ \chi = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \\ \eta\mu\chi = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \eta\mu\chi = \eta\mu - \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + (-\frac{\pi}{6}) \\ \eta' \\ \chi = 2\kappa\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \\ \eta' \\ \chi = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6} \end{cases} \end{aligned}$$



Ειδικά $\eta\mu\chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$

$$\eta\mu\chi = 1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\eta\mu\chi = -1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- Λύση της εξίσωσης $\sin \chi = \alpha$.

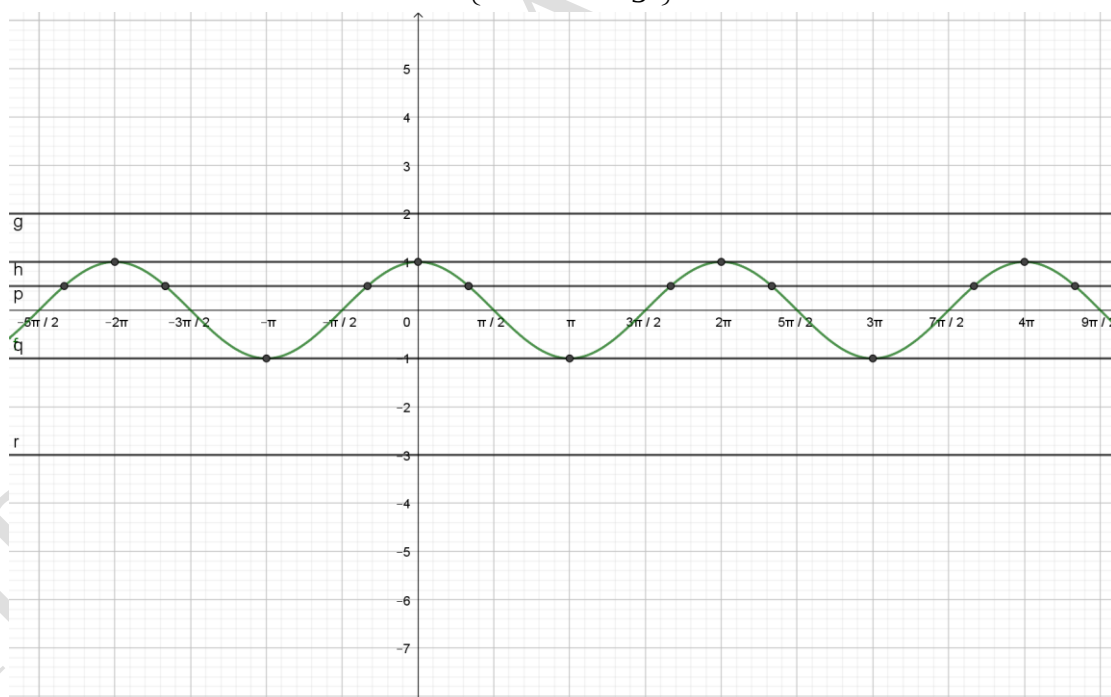
1. Αν $\alpha > 1$ ή $\alpha < -1$ η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $-1 \leq \sin \chi \leq 1$ για κάθε χ

2. Αν $\alpha \in [-1, 1]$ τότε αναζητούμε γωνία $\theta \in [0, \pi]$ τέτοια ώστε $\sin \theta = \alpha$ οπότε η εξίσωση γίνεται : $\sin \chi = \sin \theta$ και έχει άπειρες λύσεις της μορφής

$$\begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \theta \\ \text{ή} \\ \chi = 2\kappa\pi - \theta \end{cases}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Π.χ } \sin \chi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\sin \chi = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \chi = \sin \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \chi = 2\kappa\pi + \frac{2\pi}{3} \\ \text{ή} \\ \chi = 2\kappa\pi - \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$



$$\text{Ειδικά } \sin \chi = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \chi = 1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \chi = -1 \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$

- Λύση της εξίσωσης $\varepsilon\phi\chi = \alpha$

Προσοχή πρέπει $\chi \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$.

Η εξίσωση έχει λύση για οποιαδήποτε τιμή του α .

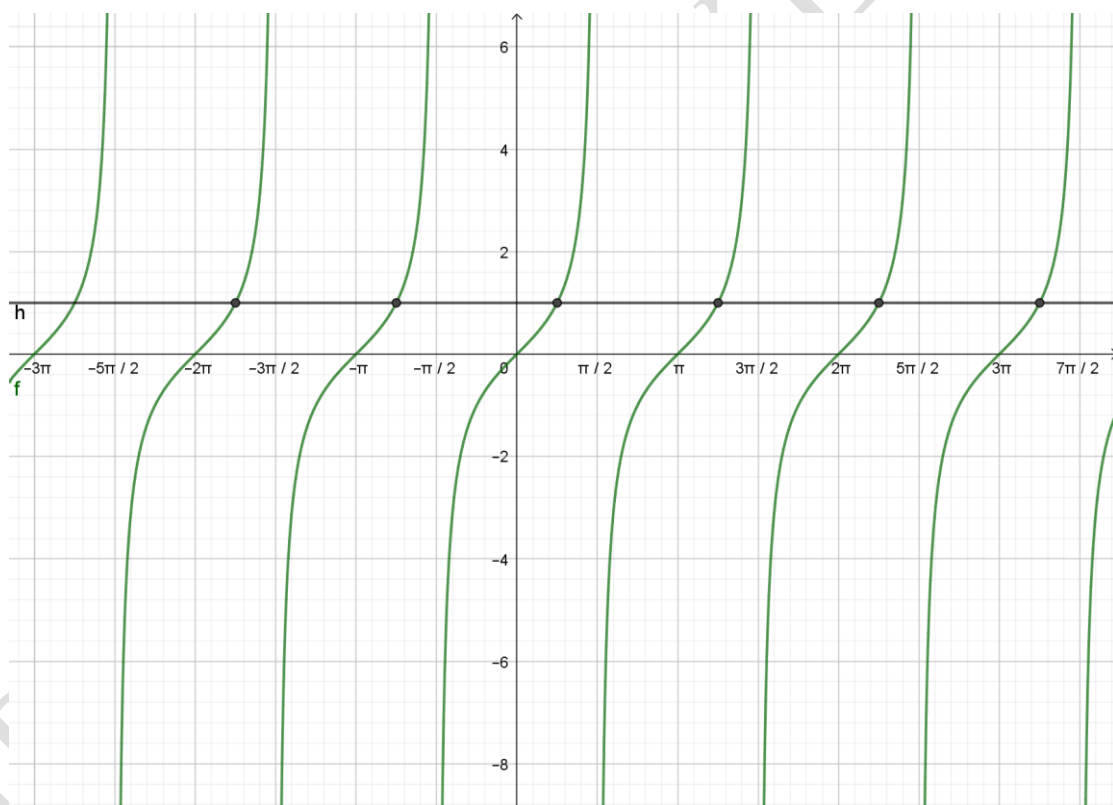
Αναζητούμε γωνία $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $\varepsilon\phi\theta = \alpha$ και η εξίσωση γίνεται $\varepsilon\phi\chi = \varepsilon\phi\theta$

που έχει άπειρες λύσεις της μορφής : $\chi = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$$\text{Π.χ. } \varepsilon\phi\theta = 1 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z},$$

$$\varepsilon\phi\theta = -1 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\varepsilon\phi\theta = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$$



- Λύση της εξίσωσης $\sigma\phi\chi = \alpha$

Προσοχή πρέπει $\chi \neq \kappa\pi$.

Η εξίσωση έχει λύση για οποιαδήποτε τιμή του α .

Αναζητούμε γωνία $\theta \in (0, \pi)$ με $\sigma\phi\theta = \alpha$ και η εξίσωση γίνεται $\sigma\phi\chi = \sigma\phi\theta$ που έχει άπειρες λύσεις της μορφής : $\chi = \kappa\pi + \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

$$\text{Π.χ. } \sigma\phi\theta = 1 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{4} , \kappa \in \mathbb{Z} ,$$

$$\sigma\phi\theta = -1 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} , \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\sigma\phi\theta = 0 \Leftrightarrow \chi = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} , \kappa \in \mathbb{Z}$$

