

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \quad (1)$$

$$\varepsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} \quad (2) \quad , \quad \sigma\phi\chi = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} \quad (3) \quad , \quad \varepsilon\phi\chi \cdot \sigma\phi\chi = 1 \quad (4)$$

$$\eta\mu^2\chi = \frac{\varepsilon\phi^2\chi}{1 + \varepsilon\phi^2\chi} \quad (5) \quad , \quad \sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1 + \varepsilon\phi^2\chi} \quad (6)$$

Παρατηρήσεις

1) Η σχέση (1) ισχύει για οποιαδήποτε γωνία ω , η (2) , (5) , (6) ισχύουν για κάθε γωνία $\omega \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, η (3) για κάθε γωνία $\omega \neq \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ και η (4) για κάθε γωνία $\omega \neq \frac{\kappa\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

2) Είναι $\eta\mu^2\omega = (\eta\mu\omega)^2 \neq \eta\mu\omega^2$ και $\sigma\upsilon\nu^2\omega = (\sigma\upsilon\nu\omega)^2 \neq \sigma\upsilon\nu\omega^2$.

3) Η βασική σχέση (1) μας πληροφορεί ότι δεν μπορεί το $\eta\mu\chi$ και το $\sigma\upsilon\nu\chi$ να είναι ταυτόχρονα 0 γιατί αν υπήρχε γωνία χ με $\eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu\chi = 0$ τότε θα ήταν $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 0^2 + 0^2 = 0$ και όχι 1 που μας λέει η ταυτότητα .

4) Άμεση συνέπεια της σχέσης (1) είναι τα ακόλουθα :

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$$

$$\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$$

$$\eta\mu\omega = \pm\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\omega}$$

5) Με τη βοήθεια των ταυτοτήτων αυτών μπορούμε να κάνουμε τα εξής :

α) Να αποδεικνύουμε άλλες πιο σύνθετες ταυτότητες (1^η μεθοδολογία ασκήσεων) .

β) Γνωρίζοντας έναν τριγωνομετρικό αριθμό να βρίσκουμε τους άλλους τρεις (2^η και 3^η μεθοδολογία ασκήσεων) .

1^η μεθοδολογία ασκήσεων

Σε αυτή την κατηγορία ασκήσεων μας ζητούν να αποδείξουμε κάποιες ισότητες .

Για να αποδείξουμε αυτές τις ισότητες έχουμε δύο τρόπους

1^{ος} τρόπος : Ξεκινάμε από το ένα μέλος (από αυτό που έχουμε κάτι να κάνουμε) και με τη βοήθεια των ταυτοτήτων και με πράξεις καταλήγουμε στο άλλο .

2^{ος} τρόπος : Θεωρούμε ότι ισχύει η ζητούμενη σχέση και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε κάτι που αληθεύει .

Παράδειγμα

Να αποδείξετε ότι : α) $\eta\mu^2\chi = \frac{\varepsilon\phi^2\chi}{1+\varepsilon\phi^2\chi}$ β) $\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\chi}$

Λύση

α) Ξεκινάμε από το 2^ο μέλος και έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon\phi^2\chi}{1+\varepsilon\phi^2\chi} &= \frac{\left(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)^2}{1+\left(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)^2} = \frac{\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{1+\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\frac{\underbrace{\sigma\upsilon\nu^2\chi}_1 + \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{1}} = \\ &= \frac{\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi}{1 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi} = \eta\mu^2\chi \end{aligned}$$

β) Ξεκινάμε από το 2^ο μέλος και έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\chi} &= \frac{1}{1+\left(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{1}{\frac{\underbrace{\sigma\upsilon\nu^2\chi}_1 + \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{1}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1} = \sigma\upsilon\nu^2\chi \end{aligned}$$

2^η μεθοδολογία ασκήσεων

Σε αυτή την κατηγορία ασκήσεων μας δίνεται το $\eta\mu\chi$ ή το $\sigma\upsilon\nu\chi$ και μας ζητούν να υπολογίσουμε τους άλλους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Οι ασκήσεις αυτές αντιμετωπίζονται ως εξής :

Από τη βασική ταυτότητα (1) βρίσκουμε το $\eta\mu\chi$ ή το $\sigma\upsilon\nu\chi$ ανάλογα τι ψάχνουμε και από τη βασικές ταυτότητες (2),(3) βρίσκουμε την $\epsilon\phi\chi$ και την $\sigma\phi\chi$.

Συνήθως μας δίνεται και ένα διάστημα για τη γωνία χ , το οποίο μας πληροφορεί για το κατάλληλο πρόσημο των τριγωνομετρικών αριθμών.

Παράδειγμα

Αν $\eta\mu\chi = -\frac{2}{3}$ και $180^\circ < \chi < 270^\circ$ να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\chi$ και την $\epsilon\phi\chi$.

Λύση

Από τη βασική ταυτότητα (1) έχουμε :

$$\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 - \eta\mu^2\chi \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{1 - \eta\mu^2\chi} \Rightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^2} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{1 - \frac{4}{9}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{\frac{9-4}{9}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\chi = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Επειδή $180^\circ < \chi < 270^\circ$ το $\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι αρνητικό οπότε $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

$$\text{Από τη βασική ταυτότητα (2) έχουμε ότι : } \epsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Και από την (4) έχουμε ότι : } \sigma\phi\chi = \frac{1}{\epsilon\phi\chi} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

3^η μεθοδολογία ασκήσεων

Σε αυτή την κατηγορία ασκήσεων μας δίνεται η $\epsilon\phi\chi$ και μας ζητούν να υπολογίσουμε τους άλλους δύο τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες (5) και (6)

Παράδειγμα

Αν $\epsilon\phi\chi = -2$ και $90^\circ < \chi < 180^\circ$ να βρείτε το $\eta\mu\chi$, $\sigma\upsilon\nu\chi$ και την $\sigma\phi\chi$.

Λύση

$$\eta\mu^2\chi = \frac{\epsilon\phi^2\chi}{1 + \epsilon\phi^2\chi} = \frac{(-2)^2}{1 + (-2)^2} = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5} \quad \text{δηλ.} \quad \eta\mu\chi = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

και επειδή $90^\circ < \chi < 180^\circ$ το $\eta\mu\chi$ είναι θετικό, οπότε $\eta\mu\chi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi = \frac{1}{1+\varepsilon\phi^2\chi} = \frac{1}{1+(-2)^2} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5} \quad \text{δηλ.} \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{\frac{1}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$$

και επειδή $90^\circ < \chi < 180^\circ$ το $\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι αρνητικό, οπότε $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\text{Τέλος } \sigma\phi\chi = \frac{1}{\varepsilon\phi\chi} = -\frac{1}{2}.$$

Λυμένες ασκήσεις

1) Να δείξετε ότι : $(\chi\sigma\upsilon\nu\alpha + \psi\eta\mu\alpha)^2 + (\chi\eta\mu\alpha - \psi\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \chi^2 + \psi^2$

Λύση

Ξεκινώντας από το 1^ο μέλος έχουμε :

$$\begin{aligned} &(\chi\sigma\upsilon\nu\alpha + \psi\eta\mu\alpha)^2 + (\chi\eta\mu\alpha - \psi\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \\ &(\chi\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \psi \cdot \eta\mu\alpha + (\psi\eta\mu\alpha)^2 + (\chi\eta\mu\alpha)^2 - 2\chi \cdot \eta\mu\alpha \cdot \psi \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha + (\psi\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \\ &\chi^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \psi^2\eta\mu^2\alpha + \chi^2\eta\mu^2\alpha + \psi^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \\ &\chi^2(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) + \psi^2(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \chi^2 \cdot 1 + \psi^2 \cdot 1 = \chi^2 + \psi^2 \end{aligned}$$

2) Αν $\alpha = \eta\mu\chi$, $\beta = \sigma\upsilon\nu\chi \eta\mu\psi$, $\gamma = \sigma\upsilon\nu\chi \sigma\upsilon\nu\psi$ να δείξετε
ότι : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

Λύση

Ξεκινώντας από το 1^ο μέλος με αντικατάσταση των δεδομένων έχουμε :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= \eta\mu^2\chi + (\sigma\upsilon\nu\chi \cdot \eta\mu\psi)^2 + (\sigma\upsilon\nu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\psi)^2 = \\ \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \eta\mu^2\psi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\psi &= \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot (\eta\mu^2\psi + \sigma\upsilon\nu^2\psi) = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot 1 = \\ \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi &= 1 \end{aligned}$$

3) Να δείξετε ότι : $\eta\mu^4\chi - \sigma\upsilon\nu^4\chi = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)$

Λύση

Ξεκινώντας από το 1^ο μέλος έχουμε :

$$\begin{aligned} \eta\mu^4\chi - \sigma\upsilon\nu^4\chi &= (\eta\mu^2\chi)^2 - (\sigma\upsilon\nu^2\chi)^2 = (\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)(\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) = \\ 1 \cdot (\eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi) &= \eta\mu^2\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi = (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi) \end{aligned}$$

4) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : $A = \frac{\eta\mu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi}$ $B = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1-\eta\mu\chi}$

Λύση

Είναι γνωστό ότι : $\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$ και λύνοντας ως προς $\eta\mu^2\chi$ έχουμε τη σχέση $\eta\mu^2\chi = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\chi$. Αντίστοιχα είναι $\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 - \eta\mu^2\chi$. Έτσι έχουμε :

$$A = \frac{\eta\mu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{(1+\sigma\upsilon\nu\chi)(1-\sigma\upsilon\nu\chi)}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = 1-\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$B = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1-\eta\mu\chi} = \frac{1-\eta\mu^2\chi}{1-\eta\mu\chi} = \frac{(1+\eta\mu\chi)(1-\eta\mu\chi)}{1-\eta\mu\chi} = 1+\eta\mu\chi$$

5) Να αποδείξετε ότι : $1 - \frac{\eta\mu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi$

Λύση

Ξεκινώντας από το 1^ο μέλος έχουμε :

$$1 - \frac{\eta\mu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} - \frac{1-\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi - (1-\sigma\upsilon\nu^2\chi)}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi - 1 + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{\sigma\upsilon\nu\chi \cdot (1+\sigma\upsilon\nu\chi)}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi$$

6) Να αποδείξετε ότι : $\frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{2}{\eta\mu\chi}$

Λύση

Ξεκινώντας από το 1^ο μέλος έχουμε :

$$\begin{aligned} \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} &= \frac{\eta\mu\chi}{1+\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{1+\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \frac{\eta\mu^2\chi}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} + \frac{(1+\sigma\upsilon\nu\chi)^2}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \\ \frac{\eta\mu^2\chi + (1+\sigma\upsilon\nu\chi)^2}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} &= \frac{\eta\mu^2\chi + 1 + 2\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \frac{1+1+2\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \frac{2+2\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} = \\ \frac{2(1+\sigma\upsilon\nu\chi)}{\eta\mu\chi(1+\sigma\upsilon\nu\chi)} &= \frac{2}{\eta\mu\chi} \end{aligned}$$

7) Να δείξετε ότι : $\varepsilon\phi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

Λύση

Ξεκινώντας από το 1^ο μέλος έχουμε :

$$\varepsilon\phi\chi + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} = \frac{\overbrace{1+\eta\mu\chi}^{\eta\mu\chi}}{\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} =$$

$$\frac{\eta\mu\chi(1+\eta\mu\chi)}{\sigma\upsilon\nu\chi(1+\eta\mu\chi)} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi(1+\eta\mu\chi)} = \frac{\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi(1+\eta\mu\chi)} = \frac{1+\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi(1+\eta\mu\chi)} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

8) Να δείξετε ότι : $\frac{1-\varepsilon\phi^2\chi}{1+\varepsilon\phi^2\chi} = (\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)$

Λύση

$$\frac{1-\varepsilon\phi^2\chi}{1+\varepsilon\phi^2\chi} = \frac{1-(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi})^2}{1+(\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi})^2} = \frac{1-\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{1+\frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1} - \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{1} + \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} =$$

$$\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} - \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi} + \frac{\eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}} = \frac{(\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi) \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi}{1 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi} =$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi = (\sigma\upsilon\nu + \eta\mu\chi)(\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi)$$

9) Αν $\sin \chi = \frac{12}{13}$ και $270^\circ < \chi < 360^\circ$ να βρείτε το $\eta\mu\chi$ και την $\epsilon\phi\chi$.

Λύση

Από τη βασική ταυτότητα (1) έχουμε :

$$\eta\mu^2 \chi + \sigma\upsilon\nu^2 \chi = 1 \Rightarrow \eta\mu^2 \chi = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 \chi \Rightarrow \eta\mu\chi = \pm \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2 \chi} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\chi = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} \Rightarrow \eta\mu\chi = \pm \sqrt{1 - \frac{144}{169}} \Rightarrow \eta\mu\chi = \pm \sqrt{\frac{169}{169} - \frac{144}{169}} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\chi = \pm \sqrt{\frac{25}{169}} \Rightarrow \eta\mu\chi = \pm \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{169}} \Rightarrow \eta\mu\chi = \pm \frac{5}{13}$$

Επειδή $270^\circ < \chi < 360^\circ$ το $\eta\mu\chi$ είναι αρνητικό οπότε $\eta\mu\chi = -\frac{5}{13}$.

Από τη βασική ταυτότητα (2) έχουμε ότι : $\epsilon\phi\chi = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = -\frac{5 \cdot 13}{12 \cdot 13} = -\frac{5}{12}$

10) Αν $4\eta\mu\chi + 6\sigma\upsilon\nu\chi = 2\eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi$ να βρείτε την $\epsilon\phi\chi$.

Λύση

Η δοθείσα σχέση μετατρέπεται ως εξής :

$$4\eta\mu\chi + 6\sigma\upsilon\nu\chi = 2\eta\mu\chi + 3\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow 4\eta\mu\chi - 2\eta\mu\chi = 3\sigma\upsilon\nu\chi - 6\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow$$

$$2\eta\mu\chi = -3\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow \eta\mu\chi = -\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu\chi \quad (3)$$

Αν το $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$ τότε από την (3) θα είναι και το $\eta\mu\chi = 0$. Όμως όπως είπαμε στην παρατήρηση 3 δεν μπορεί $\eta\mu\chi$ και $\sigma\upsilon\nu\chi$ να είναι ταυτόχρονα 0. Συνεπώς δεν μπορεί το $\sigma\upsilon\nu\chi$ να είναι 0 και έτσι μπορούμε στη σχέση (3) να διαιρέσουμε με $\sigma\upsilon\nu\chi$ και έχουμε :

$$\eta\mu\chi = -\frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu\chi \Rightarrow \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = -\frac{3\sigma\upsilon\nu\chi}{2\sigma\upsilon\nu\chi} \Rightarrow \epsilon\phi\chi = -\frac{3}{2}$$

11) Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες

$$\alpha) (3\eta\mu\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi)^2 + (4\eta\mu\chi - 3\sigma\upsilon\nu\chi)^2 = 25 \quad ,$$

$$\beta) (\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi + 1)(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1) = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\gamma) \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\epsilon\phi\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\phi\alpha} = \eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha \quad , \quad \delta) \frac{\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi + 1}{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1} = \frac{\eta\mu\chi + 1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$$

Λύση

$$\alpha) 1^\circ \text{ μέλος} = 9\eta\mu^2\chi + 16\sigma\upsilon\nu^2\chi + 24\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi + 16\eta\mu^2\chi + 19\sigma\upsilon\nu^2\chi - 24\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 25\eta\mu^2\chi + 25\sigma\upsilon\nu^2\chi = 25(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) = 25 \cdot 1 = 25$$

$$\beta) 1^\circ \text{ μέλος} = \eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu - \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1 = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 1 + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$$

$$\gamma) 1^\circ \text{ μέλος} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} + \frac{\eta\mu\alpha}{1-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} + \frac{\eta\mu\alpha}{\frac{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} - \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} = \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha$$

$$\delta) \frac{\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi + 1}{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1} = \frac{\eta\mu\chi + 1}{\sigma\upsilon\nu\chi} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\chi(\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi + 1) = (\eta\mu\chi + 1)(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1) \Leftrightarrow \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - \sigma\upsilon\nu^2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi + \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi - 1 \Leftrightarrow -\sigma\upsilon\nu^2\chi = \eta\mu^2\chi - 1 \Leftrightarrow 1 = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi \text{ που ισχύει}$$

$$12) \alpha) \text{ Αν } \chi = 2 \eta\mu\alpha \text{ και } \psi = 1 - 2\eta\mu^2\alpha \text{ να δείξετε ότι } \chi^2 + \psi^2 = 1$$

$$\beta) \text{ Αν } \chi = \rho \eta\mu\alpha \text{ και } \psi = \rho \eta\mu\alpha \text{ και } \zeta = \rho \sigma\upsilon\nu\alpha \text{ να δείξετε ότι } \chi^2 + \psi^2 + \zeta^2 = \rho^2.$$

Λύση

α) Ξεκινάμε από το 1^ο μέλος και με αντικατάσταση των χ και ψ έχουμε :

$$\chi^2 + \psi^2 = (2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (1 - 2\eta\mu^2\alpha)^2 = 4\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1 + 4\eta\mu^4\alpha - 4\eta\mu^2\alpha = 1 + 4\eta\mu^4\alpha - 4\eta\mu^2\alpha(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = 1 + 4\eta\mu^4\alpha - 4\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\alpha = 1 + 4\eta\mu^4\alpha - 4\eta\mu^4\alpha = 1$$

β) Ξεκινάμε από το 1^ο μέλος και με αντικατάσταση των χ και ψ έχουμε :

$$\chi^2 + \psi^2 + \zeta^2 = (\rho\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta)^2 + (\rho\eta\mu\alpha\eta\mu\beta)^2 + (\rho\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \rho^2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\beta + \rho^2\eta\mu^2\alpha\eta\mu^2\beta + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \rho^2\eta\mu^2\alpha(\sigma\upsilon\nu^2\beta + \eta\mu^2\beta) + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \rho^2\eta\mu^2\alpha \cdot 1 + \rho^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \rho^2(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \rho^2 \cdot 1 = \rho^2$$

13) Αν $\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi = \alpha$ να υπολογίσετε συναρτήσει του α τις παρακάτω παραστάσεις

α) $\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi$, β) $\frac{1}{\eta\mu\chi} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$, γ) $\epsilon\phi^2\chi + \sigma\phi^2\chi$, δ) $\epsilon\phi^3\chi + \sigma\phi^3\chi$

Λύση

α) Αφού $\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi = \alpha$ έχουμε

$$\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} + \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi} = \alpha \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = \alpha \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = \alpha \Leftrightarrow \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{\alpha}$$

β) Υπολογίζουμε πρώτα την παράσταση $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi$. Είναι

$$(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi + 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = 1 + \frac{2}{\alpha} \quad \text{οπότε} \quad \eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \pm\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}$$

(Υποθέτουμε ότι $1 + \frac{2}{\alpha} > 0$ αλλιώς το πρόβλημα δεν έχει λύση)

$$\text{Τέλος έχουμε} \quad \frac{1}{\eta\mu\chi} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = \frac{\pm\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}}{\frac{1}{\alpha}} = \pm\alpha\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}.$$

$$\gamma) \epsilon\phi^2\chi + \sigma\phi^2\chi = (\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi)^2 - 2\epsilon\phi\chi\sigma\phi\chi = \alpha^2 - 2 \cdot 1 = \alpha^2 - 2$$

$$\delta) \epsilon\phi^3\chi + \sigma\phi^3\chi = (\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi)^3 - 3\epsilon\phi\chi\sigma\phi\chi(\epsilon\phi\chi + \sigma\phi\chi) = \alpha^3 - 3 \cdot 1 \cdot \alpha = \alpha^3 - \alpha$$

14) Να δείξετε ότι οι παρακάτω παραστάσεις είναι ανεξάρτητες του χ :

α) $\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi$, β) $\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi + 2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi$

γ) $\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 5\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi$

Λύση

α) Θα κάνουμε χρήση της ταυτότητας $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$$\begin{aligned} \eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi &= (\eta\mu^2\chi)^3 + (\sigma\upsilon\nu^2\chi)^3 + 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = \\ &= (\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)^3 - 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi(\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi) + 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = \\ &= 1^3 - 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi \cdot 1 + 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 \end{aligned}$$

β) Θα κάνουμε χρήση της ταυτότητας $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$\begin{aligned} \eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi + 2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi &= (\eta\mu^2\chi)^2 + (\sigma\upsilon\nu^2\chi)^2 + 2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi = \\ &= (\eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi)^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

γ) Θα εκμεταλλευτούμε τα προηγούμενα ερωτήματα. Είναι

$$\begin{aligned} \eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 5\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi &= \\ \eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 3\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi + \eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi + 2\eta\mu^2\chi\sigma\upsilon\nu^2\chi &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$