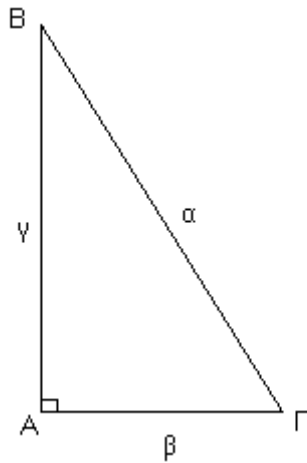


Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$).



Ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ως εξής :

$$\eta\mu = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}, \quad \sigma\upsilon\nu = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\phi = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}, \quad \sigma\phi = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}$$

Με βάση λοιπόν το παραπάνω σχήμα έχουμε :

$$\begin{aligned} \eta\mu\hat{B} &= \frac{\beta}{\alpha}, & \sigma\upsilon\nu\hat{B} &= \frac{\gamma}{\alpha}, & \epsilon\phi\hat{B} &= \frac{\beta}{\gamma}, & \sigma\phi\hat{B} &= \frac{\gamma}{\beta} \\ \eta\mu\hat{\Gamma} &= \frac{\gamma}{\alpha}, & \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} &= \frac{\beta}{\alpha}, & \epsilon\phi\hat{\Gamma} &= \frac{\gamma}{\beta}, & \sigma\phi\hat{\Gamma} &= \frac{\beta}{\gamma} \end{aligned}$$

Με τον τρόπο που ορίσαμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη οξείας γωνίας καταλαβαίνουμε ότι η γωνία αυτή πρέπει να αποτελεί γωνία ορθογωνίου τριγώνου.

Για την ώρα λοιπόν δεν μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας, αν αυτή δεν βρίσκεται σε ορθογώνιο τρίγωνο.

Επίσης δεν μπορούμε για την ώρα να βρούμε τριγωνομετρικούς αριθμούς αμβλείας γωνίας, διότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο δεν γίνεται να υπάρχει αμβλεία γωνία, γιατί τότε το άθροισμα των γωνιών θα υπέρβαινε τις 180° .

Παρακάτω θα δούμε έναν άλλο τρόπο υπολογισμού τριγωνομετρικών αριθμών, που να μην είναι απαραίτητη η παρουσία ορθογωνίου τριγώνου

Παρατηρήσεις

1) Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί συνδέουν τις πλευρές ενός τριγώνου με τις γωνίες του . Αν λοιπόν γνωρίζουμε τις πλευρές μπορούμε να βρούμε τις γωνίες του και αν ξέρουμε κάποια στοιχεία του τριγώνου μπορούμε να βρούμε τα υπόλοιπα . Αν ξέρουμε βέβαια μόνο τις γωνίες δεν μπορούμε να βρούμε τις πλευρές .

Η τακτική που ακολουθούμε σε ασκήσεις όπου γνωρίζοντας κάποια στοιχεία του τριγώνου θέλουμε να βρούμε τα υπόλοιπα είναι η εξής :

Ένας τριγωνομετρικός αριθμός συνδέει 3 στοιχεία ενός τριγώνου που είναι μια γωνία και δύο πλευρές . Κάθε φορά λοιπόν διαλέγουμε εκείνον τον τριγωνομετρικό αριθμό που συνδέει δύο γνωστά στοιχεία με ένα άγνωστο .

Αν φυσικά η άσκηση εξελίσσεται σε ένα τυχαίο τρίγωνο και όχι ορθογώνιο τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τύπους που μάθαμε .

Δημιουργούμε λοιπόν ορθογώνια τρίγωνα φέροντας συνήθως τα ύψη του τριγώνου .

2) Θυμίζουμε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει το Πυθαγόρειο Θεώρημα . Έτσι για το παραπάνω σχήμα ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

3) Επειδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά , οι τριγωνομετρικοί αριθμοί ημίτονο και συνημίτονο ισούνται με ένα κλάσμα όπου ο παρονομαστής είναι μεγαλύτερος από τον αριθμητή .

Αυτό σημαίνει ότι σαν αριθμοί είναι μικρότεροι από τη μονάδα .

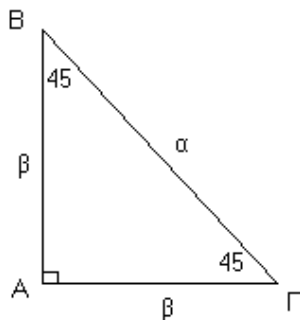
Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο με την εφαπτομένη .

Λυμένες ασκήσεις

1) Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$.

Λύση

Για τον υπολογισμό των τριγωνομετρικών αριθμών των 45° , επιλέγουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο . Ο λόγος που διαλέγουμε ορθογώνιο και ισοσκελές είναι ότι σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες έχουν άθροισμα 90° και αν επιπλέον είναι και ισοσκελές τότε θα είναι ίσες οπότε η κάθε μια θα είναι 45° .



Επειδή είναι ισοσκελές έχουμε ότι $AB = AG = \beta$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \beta^2 = 2\beta^2 \quad \text{δηλ} \quad \sqrt{\alpha^2} = \sqrt{2\beta^2} \quad \text{δηλ} \quad \alpha = \beta\sqrt{2}.$$

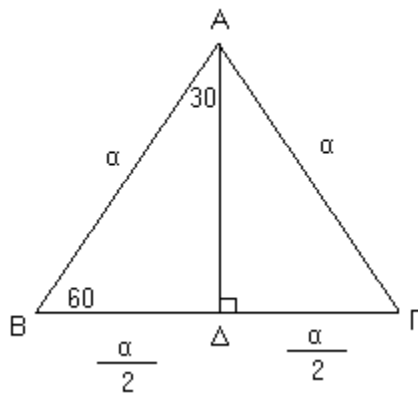
$$\text{Είναι} \quad \eta\mu 45^\circ = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{και} \quad \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{και} \quad \epsilon\phi 45^\circ = \frac{\beta}{\beta} = 1.$$

Για να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $30^\circ, 60^\circ$ διαλέγουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο.

Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι ότι σε ένα ισόπλευρο όλες οι γωνίες είναι ίσες και από 60° και αν φέρουμε ένα ύψος του, αυτό θα είναι και διχοτόμος και έτσι θα προκύψει γωνία 30° .



Το ύψος AD είναι και διάμεσος οπότε $BD = DC = \frac{\alpha}{2}$.

Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο ABD έχουμε

$$AD^2 = \alpha^2 - \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{4\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4} \quad \text{δηλ} \quad AD = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}.$$

Από το ορθογώνιο ABD έχουμε

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\alpha \frac{\sqrt{3}}{2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

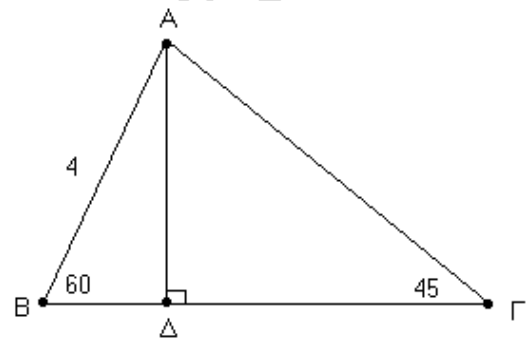
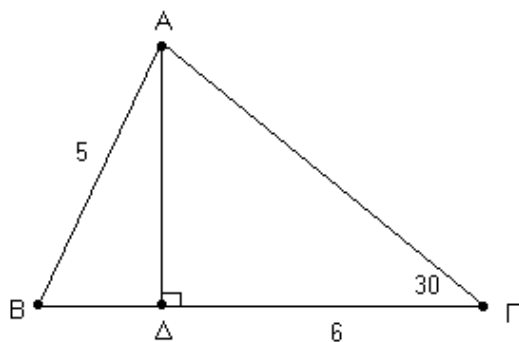
$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{B\Delta}{AB} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{A\Delta}{AB} = \frac{\alpha \frac{\sqrt{3}}{2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 60^\circ = \frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\frac{\alpha \sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha 2\sqrt{3}}{\alpha 2} = \sqrt{3}$$

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{B\Delta}{A\Delta} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha \sqrt{3}}{2}} = \frac{2\alpha}{2\alpha \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2) Να υπολογίσετε τις πλευρές και τα εμβαδά των παρακάτω σχημάτων.



Λύση

A) Θα δουλέψουμε στα ορθογώνια τρίγωνα που σχηματίζονται και πρώτα στο AΔΓ γιατί εκεί έχουμε περισσότερα στοιχεία.

Για να βρούμε την πλευρά AΓ θα πάρουμε το $\sigma\upsilon\nu 30^\circ$ γιατί το $\sigma\upsilon\nu$ συνδυάζει την υποτείνουσα που ψάχνω με την προσκείμενη κάθετη ΓΔ που ξέρω.

Είναι

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} \quad \text{δηλ} \quad \Delta\Gamma = A\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \quad \text{δηλ} \quad A\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = 6.93$$

Για να βρούμε την πλευρά AΔ έχουμε πολλές επιλογές ($\epsilon\phi$, $\eta\mu$, Πυθαγόρειο).

$$\text{Είναι} \quad \eta\mu 30^\circ = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \quad \text{δηλ} \quad A\Delta = A\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = 6.93 \cdot \frac{1}{2} = 3.47.$$

Στο ABΔ ξέρουμε τις AB, AΔ και ψάχνουμε τη BΔ. Επειδή δεν ξέρουμε γωνίες θα χρησιμοποιήσουμε το Πυθαγόρειο.

Είναι $ΒΔ^2 = ΑΒ^2 - ΑΔ^2 = 5^2 - 3,47^2 = 25 - 12 = 13$ οπότε $ΒΔ = \sqrt{13} = 3,6$.

Τέλος $E = \frac{1}{2} \cdot ΒΓ \cdot ΑΔ$, όπου $ΑΔ = 3,47$ και $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 3,6 + 6 = 9,6$

Οπότε $E = 16,656$

B) Δουλεύουμε στο $ΑΒΔ$ που έχουμε περισσότερα στοιχεία.

Για να βρούμε τη $ΒΔ$ θα χρησιμοποιήσουμε το $\sin 60^\circ$, γιατί το $\sin$ συνδυάζει την προσκείμενη κάθετη που ψάχνω και την υποτείνουσα που ξέρω.

Είναι $\sin 60^\circ = \frac{ΒΔ}{ΑΒ}$ δηλ $ΒΔ = ΑΒ \cdot \sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Για να βρούμε την $ΑΔ$ έχουμε πολλές επιλογές ($\cos$, $\eta\mu$, Πυθαγόρειο).

Είναι $\eta\mu 60^\circ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ δηλ $ΑΔ = ΑΒ \cdot \eta\mu 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} = 3,46$.

Στο ορθογώνιο $ΑΔΓ$ ξέρουμε την πλευρά $ΑΔ$ και τη γωνία Γ .

Για να βρούμε την $ΔΓ$ θα χρησιμοποιήσουμε την $\epsilon\phi 45^\circ$ γιατί μόνο η $\epsilon\phi$ συνδυάζει την απέναντι κάθετη που ξέρω μα την προσκείμενη κάθετη που ψάχνω.

Είναι $\epsilon\phi 45^\circ = \frac{ΑΔ}{ΔΓ}$ δηλ $ΔΓ \cdot \epsilon\phi 45^\circ = ΑΔ$ δηλ $ΔΓ = \frac{ΑΔ}{\epsilon\phi 45^\circ} = \frac{3,46}{1} = 3,46$.

(Θα μπορούσαμε και γεωμετρικά να δείξουμε ότι $ΑΔ = ΔΓ$ αφού $ΑΔΓ$ ορθογώνιο και ισοσκελές).

Για να βρούμε την $ΑΓ$ έχουμε πολλές επιλογές ($\eta\mu$, $\sin$, Πυθαγόρειο).

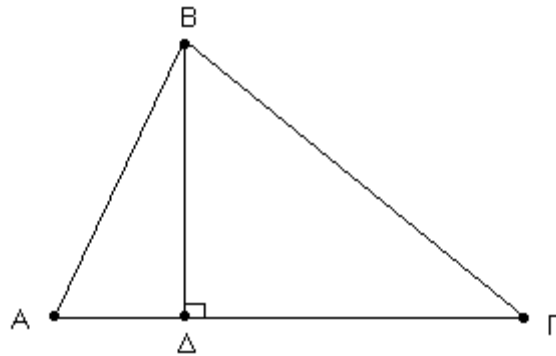
Είναι $\eta\mu 45^\circ = \frac{ΑΔ}{ΑΓ}$ δηλ $ΑΓ \cdot \eta\mu 45^\circ = ΑΔ$ δηλ $ΑΓ = \frac{ΑΔ}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{3,46}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 \cdot 3,46}{\sqrt{2}} = 4,9$

Τέλος $E = \frac{1}{2} ΑΔ \cdot ΒΓ$, όπου $ΑΔ = 3,46$ και $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 2 + 3,46 = 5,46$

Οπότε $E = 9,45$

3) Σε κάθε τρίγωνο να δείξετε ότι $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \eta \mu \hat{A}$.

Λύση



Είναι γνωστό ότι $E = \frac{1}{2} AG \cdot BD$ (1).

Δεν θέλουμε τη πλευρά BD στον τύπο του E , ενώ αντίθετα θέλουμε το ημίτονο της γωνίας A .

Από το ορθογώνιο ABD έχουμε ότι

$$\eta\mu\hat{A} = \frac{BD}{AB} \quad \text{δηλ} \quad BD = AB \eta\mu\hat{A} \quad (2).$$

Από (1), (2) έχουμε ότι $E = \frac{1}{2} AG \cdot AB \cdot \eta\mu\hat{A} = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu\hat{A}$.

Παρατήρηση

Με κυκλική εναλλαγή των γραμμάτων έχουμε και τους εξής τύπους

$$E = \frac{1}{2} \alpha \eta\mu\hat{B} \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta\mu\hat{\Gamma}.$$

Οι τύποι αυτοί επιτρέπουν τον υπολογισμό του εμβαδού ενός τριγώνου, γνωρίζοντας μόνο 2 οποιεσδήποτε πλευρές και την περιεχόμενη γωνία.