

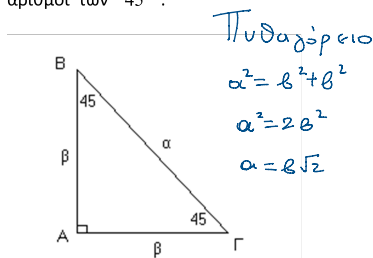
Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$). Ορίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς, ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη, οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ως εξής:

$\eta\mu = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$		
$\sigma\upsilon\nu = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}$		
$\epsilon\phi = \frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκειμένη κάθετη}}$		
$\sigma\phi = \frac{\text{προσκειμένη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}$		

Με βάση λοιπόν το παραπάνω σχήμα έχουμε:

$$\begin{aligned} \eta\mu\hat{B} &= \frac{\beta}{\alpha}, & \sigma\upsilon\nu\hat{B} &= \frac{\gamma}{\alpha}, & \epsilon\phi\hat{B} &= \frac{\gamma}{\beta}, & \sigma\phi\hat{B} &= \frac{\beta}{\gamma} \\ \eta\mu\hat{\Gamma} &= \frac{\gamma}{\alpha}, & \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} &= \frac{\beta}{\alpha}, & \epsilon\phi\hat{\Gamma} &= \frac{\beta}{\gamma}, & \sigma\phi\hat{\Gamma} &= \frac{\gamma}{\beta} \end{aligned}$$

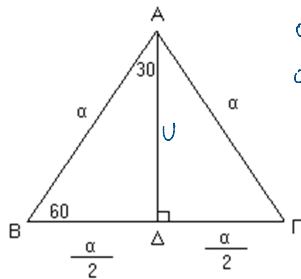
Θέμα 1ο Με βάση το παρακάτω σχήμα να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 45° .



Πυθαγόρειο
 $\alpha^2 = \beta^2 + \beta^2$
 $\alpha^2 = 2\beta^2$
 $\alpha = \beta\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \eta\mu 45^\circ &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sigma\upsilon\nu 45^\circ &= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \epsilon\phi 45^\circ &= \frac{\beta}{\beta} = 1 \\ \sigma\phi 45^\circ &= \frac{\beta}{\beta} = 1 \end{aligned}$$

Θέμα 2ο Με βάση το παρακάτω σχήμα να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των $30^\circ, 60^\circ$.



Πυθαγόρειο στο $\triangle ABD$

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + u^2 \\ \alpha^2 &= \frac{\alpha^2}{4} + u^2 \\ \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} &= u^2 \\ \frac{3\alpha^2}{4} &= u^2 \\ u &= \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

στο $\triangle AB\Delta$

$$\begin{aligned} \eta\mu 30^\circ &= \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{1}{2} \\ \sigma\upsilon\nu 30^\circ &= \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \epsilon\phi 30^\circ &= \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sigma\phi 30^\circ &= \frac{AD}{BD} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

στο $\triangle AB\Delta$

$$\begin{aligned} \eta\mu 60^\circ &= \frac{AD}{AB} = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sigma\upsilon\nu 60^\circ &= \frac{BD}{AB} = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \epsilon\phi 60^\circ &= \frac{AD}{BD} = \sigma\phi 30^\circ = \sqrt{3} \\ \sigma\phi 60^\circ &= \frac{BD}{AD} = \epsilon\phi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

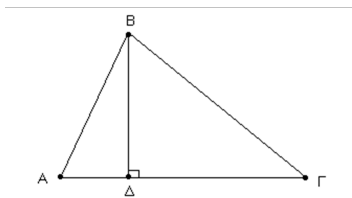
$\frac{\sqrt{k}}{2}, k=1,3,3$

	$\eta\mu$	$\sigma\upsilon\nu$	$\epsilon\phi$	$\sigma\phi$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Θέμα 3ο Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ να δείξετε ότι

$$E = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu\hat{A} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \gamma \cdot \eta\mu\hat{B} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\hat{\Gamma}.$$

Λύση



$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha \Gamma \cdot BD \quad (1)$$

$$\triangle AB\Delta: \eta\mu\hat{A} = \frac{BD}{AB} \Rightarrow BD = AB \cdot \eta\mu\hat{A} \quad (2)$$

$$c_1, c_2 \Rightarrow (AB\Gamma) = \frac{1}{2} \alpha \Gamma \cdot AB \cdot \eta\mu\hat{A} = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\hat{A}$$

Το ακτίνιο (rad) ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Το ακτίνιο είναι η γωνία που όταν γίνει επίκεντρη σε κύκλο (Ο,ρ) βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ.

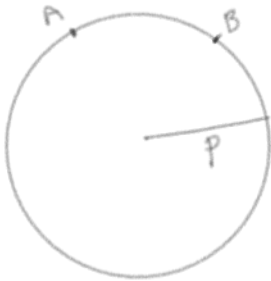
Ένα τόξο που έχει μήκος διπλάσια της ακτίνας ρ είναι ίσο με 2 ακτίνια κτλ.

Επειδή ο κύκλος έχει μήκος $2\pi\rho$ δηλαδή ισούται με 2π φορές την ακτίνα ρ, είναι 2π ακτίνια. Όμως ο κύκλος αντιστοιχεί σε 360 μοίρες.

Συνεπώς 2π ακτίνια αντιστοιχούν σε 360° , οπότε π ακτίνια αντιστοιχούν σε 180° .

και γενικά αν μια γωνία μ° αντιστοιχεί σε α ακτίνια (rad) τότε ισχύει ότι :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$



$$\ell_{\widehat{AB}} = \rho \Leftrightarrow \widehat{AB} = 1 \text{ rad}$$

$$\ell_{\widehat{AB}} = 2\rho \Leftrightarrow \widehat{AB} = 2 \text{ rad}$$

$$\ell_{\widehat{AB}} = \alpha \cdot \rho \Leftrightarrow \widehat{AB} = \alpha \text{ rad}$$

$$\text{Μήκος κύκλου } 2\pi\rho \Leftrightarrow \text{κύκλος} = 2\pi \text{ rad}$$

	Μοίρες	rad
κύκλος $\rightarrow$	360°	2π
	180°	π
	90°	$\pi/2$
	60°	$\pi/3$
	45°	$\pi/4$
	30°	$\pi/6$
	270°	$\frac{3\pi}{2}$
	120°	$\frac{2\pi}{3}$
	μ°	α

Θέμα 4^ο Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

τρο γωνίας μοίρες	30°	45°	60°	90°	120°	150°	135°	240°	270°	210°
τρο γωνίας ακτίνια	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\pi/3$	$\pi/2$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$7\pi/6$

rad μοίρες
 π 180

$$1^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,32^\circ$$

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$