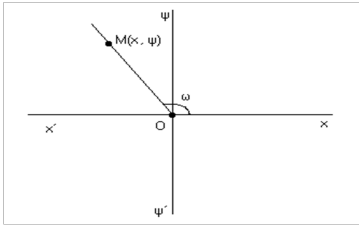


Μάθημα 16ο -Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας

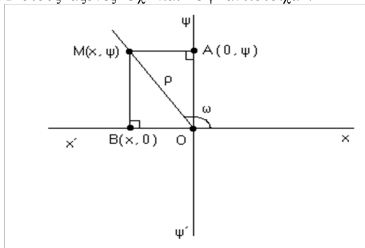
Εστω ότι έχουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων .

Ορίζουμε **θετική φορά** περιστροφής αυτήν που είναι αντίθετη από εκείνη των δεικτών ενός ρολογιού .

Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου ονομάζουμε ω τη γωνία που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων O και πλευρές τον θετικό ημιάξονα Ox και την ημιευθεία OM . Η γωνία αυτή προκύπτει αν φανταστούμε ότι η ημιευθεία Ox περιστρέφεται γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπίψει με την ημιευθεία OM .



Εστω λοιπόν ότι έχουμε ένα σημείο $M(x, y)$ και $B(x, 0)$, $A(0, y)$ οι προβολές του M στους άξονες Ox και Oy αντίστοιχα .



Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο OMB μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος OM .Αν $OM = \rho$ τότε $OB = |x|$, $MB = OA = |y|$ και από το Πυθαγόρειο έχουμε :

$$\rho^2 = |x|^2 + |y|^2 \Rightarrow \rho^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$$

και επειδή $\rho = OM > 0$ ως μήκος έχουμε ότι $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ορίζουμε : $\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$ $\epsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$ $\sigma\phi\omega = \frac{y}{x}$

Παρατηρήσεις

1) Στις παραπάνω σχέσεις οι x, y μπαίνουν με τα πρόσημά τους , ενώ το ρ όπως είδαμε είναι πάντα θετικό .

2) Από το ορθογώνιο τρίγωνο OMB βλέπουμε ότι το ρ είναι υποτείνουσα και οι κάθετες πλευρές είναι $|x|$ και $|y|$. Επειδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι η μεγαλύτερη πλευρά έχουμε ότι : $|x| < \rho$ και $|y| < \rho$.

Στις ειδικές περιπτώσεις που το M βρίσκεται πάνω στους άξονες είναι ανάλογα με το σε πιο άξονα βρίσκεται έχουμε $|x| = \rho$ ή $|y| = \rho$.

Τελικά $|x| \leq \rho$ και $|y| \leq \rho$

Επομένως $\left| \frac{x}{\rho} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{y}{\rho} \right| \leq 1 \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu\omega| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$.

και $\left| \frac{y}{\rho} \right| \leq 1 \Rightarrow \left| \frac{x}{\rho} \right| \leq 1 \Rightarrow |\eta\mu\omega| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$.

Για την εφαπτομένη και συνεφαπτομένη δεν έχουμε ανάλογους περιορισμούς .

3) Αν το M βρίσκεται πάνω στον άξονα y/y' τότε η τετμημένη του M είναι 0 και επομένως στον τύπο της εφαπτομένης μηδενίζεται ο παρονομαστής .

Επομένως δεν ορίζεται η εφαπτομένη των γωνιών 90 και 270 και κάθε άλλης με τελική πλευρά στον y/y' .

4) Αν το M βρίσκεται πάνω στον άξονα x/x' τότε η τεταγμένη του M είναι 0 και επομένως στον τύπο της συνεφαπτομένης μηδενίζεται ο παρονομαστής .

Επομένως δεν ορίζεται η συνεφαπτομένη των γωνιών 0 και 180 και κάθε άλλης με τελική πλευρά στον x/x' .

Γωνίες μεγαλύτερες των 360° ή αρνητικές γωνίες

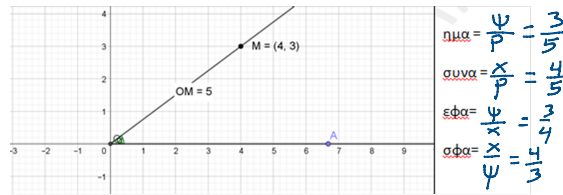
Αν ο θετικός ημιάξονας Ox διαγράψει k πλήρεις περιστροφές (κατά τη θετική ή κατά την αρνητική φορά) και μια γωνία ω κατά τη θετική φορά , τότε προκύπτουν γωνίες άνω των 360° ή και αρνητικές γωνίες . Επειδή όμως οι τριγωνομετρικοί αριθμοί καθορίζονται από την τελική πλευρά της γωνίας οι έτσι σχηματιζόμενες γωνίες θα έχουν τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την γωνία ω .

Ισχύουν δηλαδή οι εξής σχέσεις :

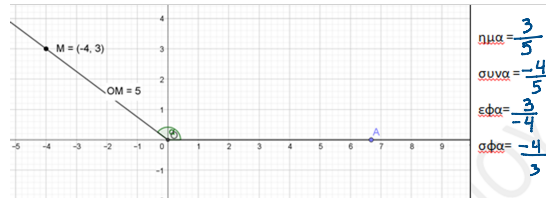
$$\begin{aligned} \eta\mu(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \eta\mu\omega & \eta' & \eta\mu(2k\pi + \omega) = \eta\mu\omega \\ \sigma\upsilon\nu(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\upsilon\nu\omega & \eta' & \sigma\upsilon\nu(2k\pi + \omega) = \sigma\upsilon\nu\omega \\ \epsilon\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \epsilon\phi\omega & \eta' & \epsilon\phi(2k\pi + \omega) = \epsilon\phi\omega \\ \sigma\phi(k \cdot 360^\circ + \omega) &= \sigma\phi\omega & \eta' & \sigma\phi(2k\pi + \omega) = \sigma\phi\omega \end{aligned} , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Έτσι γνωρίζοντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 0° μέχρι 360° μπορούμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οποιασδήποτε γωνίας .

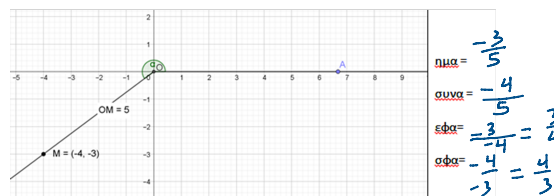
Θέμα 1° Να βρείτε σε κάθε περίπτωση τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α .



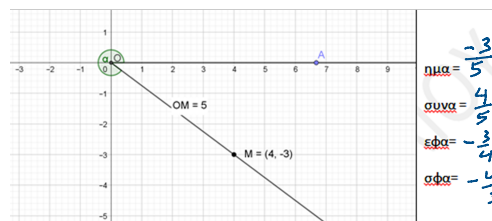
ολα θετικά



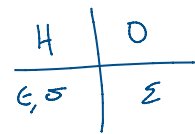
μονο το ημ
είναι θετικό



μονο εφ, σφ
θετικά



μονο το σιν
είναι θετικό



zi είναι θετικό
σε κάθε τεταρτημόριο

Θέμα 2° Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των 1110° .

$$\begin{array}{r|l} 1110 & 360 \\ \hline 1080 & 3 \\ \hline 30 & \end{array}$$

$$1110^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 30^\circ \quad \text{οπότε}$$

$$\psi 1110^\circ = \psi 30^\circ = \frac{1}{2}$$

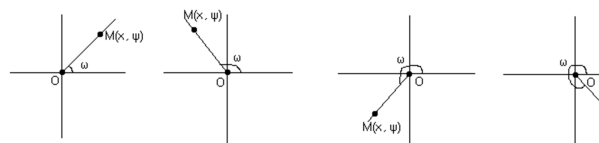
$$\sin 1110^\circ = \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\varphi 1110^\circ = \epsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 1110^\circ = \sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$$

Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

Είπαμε ότι στους τύπους που ορίσαμε τα χ, ψ μπαίνουν με τα πρόσημά τους, ενώ το ρ όπως είδαμε είναι πάντα θετικό. Το πρόσημο λοιπόν των τριγωνομετρικών αριθμών εξαρτάται από το πρόσημο των χ, ψ δηλαδή εξαρτάται από το σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκεται το M .



Τεταρτημόριο Τριγ. Αριθ.	1ο	2ο	3ο	4ο
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-

1. Η γωνία ω είναι $0 < \omega < 90$.

Το M βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο οπότε $\chi > 0, \psi > 0$ και

$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{+}{+} > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\chi}{\rho} = \frac{+}{+} > 0, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{\chi} = \frac{+}{+} > 0, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\chi}{\psi} = \frac{+}{+} > 0$$

Είναι λοιπόν όλοι θετικοί.

2. Η γωνία ω είναι $90 < \omega < 180$.

Το M βρίσκεται στο 2° τεταρτημόριο οπότε $\chi < 0, \psi > 0$ και

$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{+}{+} > 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\chi}{\rho} = \frac{-}{+} < 0, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{\chi} = \frac{+}{-} < 0, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\chi}{\psi} = \frac{-}{+} < 0$$

Μόνο το ημίτονο θετικό.

3. Η γωνία ω είναι $180 < \omega < 270$.

Το M βρίσκεται στο 3° τεταρτημόριο οπότε $\chi < 0, \psi < 0$ και

$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{-}{+} < 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\chi}{\rho} = \frac{-}{+} < 0, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{\chi} = \frac{-}{-} > 0, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\chi}{\psi} = \frac{-}{-} > 0$$

Μόνο η εφαπτομένη και η συνεφαπτομένη είναι θετικοί.

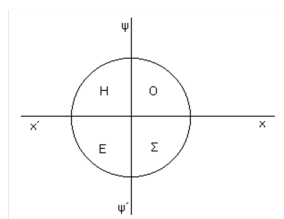
4. Η γωνία ω είναι $270 < \omega < 360$.

Το M βρίσκεται στο 4° τεταρτημόριο οπότε $\chi > 0, \psi < 0$ και

$$\eta\mu\omega = \frac{\psi}{\rho} = \frac{-}{+} < 0, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\chi}{\rho} = \frac{+}{+} > 0, \quad \epsilon\varphi\omega = \frac{\psi}{\chi} = \frac{-}{+} < 0, \quad \sigma\varphi\omega = \frac{\chi}{\psi} = \frac{+}{-} < 0$$

Μόνο το συνημίτονο είναι θετικό.

- Συνοψίζουμε τα παραπάνω αποτελέσματα με τον παρακάτω μνημονικό κανόνα, όπου το κάθε σύμβολο δηλώνει τι είναι θετικό στο κάθε τεταρτημόριο.



O: όλοι, H: ημίτονο, Σ: συνημίτονο, Ε: εφαπτομένη και συνεφαπτομένη

Θέμα 5° Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω τριγωνομετρικών αριθμών:

$\eta\mu 280^\circ < 0$, $\sigma\upsilon\nu 160^\circ < 0$, $\sigma\varphi 310^\circ < 0$, $\sigma\upsilon\nu 3 < 0$, $\eta\mu 4 < 0$, $\sigma\varphi 5 < 0$

αφού

$$270^\circ < 280^\circ < 360^\circ \rightarrow 280^\circ \text{ τέταρτο ημίτονο } 4^\circ$$

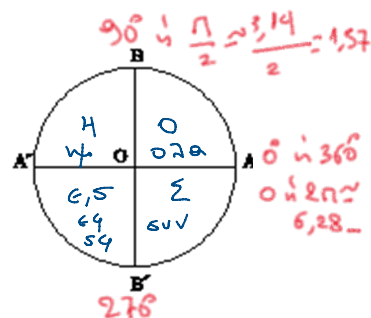
$$90^\circ < 160^\circ < 180^\circ \rightarrow 160^\circ \text{ } -11 \text{ } 2^\circ$$

$$270^\circ < 310^\circ < 360^\circ \rightarrow 310^\circ \text{ } -11 \text{ } 4^\circ$$

$$\frac{\pi}{2} < 3 < \pi \rightarrow 3^\circ \text{ } 3^\circ \text{ } 2^\circ \text{ } 2^\circ$$

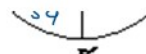
$$\pi < 4 < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 4^\circ \text{ } 2^\circ \text{ } 30^\circ$$

$$\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi \rightarrow 5^\circ \text{ } 2^\circ \text{ } 40^\circ$$



$$\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi \rightarrow 5 \text{ rad } - 11 - 40$$

Μοίρες	rad
0°	0
π	3,14
$\frac{\pi}{2}$	1,57
$\frac{3\pi}{2}$	4,71
2π	6,28



$$276$$

$$\text{ή } \frac{3\pi}{2} \approx 3 \cdot 1,57 = 4,71$$

Θέμα 6° Ερωτήσεις συμπλήρωσης

Δίνεται ο τριγωνομετρικός κύκλος που δείχνει το διπλανό σχήμα. Να γράψετε όλες τις γωνίες με τελική πλευρά :

Τελική πλευρά	Γωνίες σε μοίρες	Γωνίες σε rad
OA	$k \cdot 360^\circ$	$2k\pi$
OB	$k \cdot 360^\circ + 90^\circ$	$2k\pi + \frac{\pi}{2}$
OA'	$k \cdot 360^\circ + 180^\circ$	$2k\pi + \pi$
OB'	$k \cdot 360^\circ - 90^\circ$	$2k\pi - \frac{\pi}{2}$
OA ή OA'	$k \cdot 180^\circ$	$k\pi$
OB ή OB'	$k \cdot 180^\circ + 90^\circ$	$k\pi + \frac{\pi}{2}$
OA ή OA' ή OB ή OB'	$k \cdot 90^\circ$	$\frac{k\pi}{2}$

