

$$1) \cos^2 x + \sin^2 x = 1, x \in \mathbb{R}$$

$$2) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \tan x \cdot \cot x = 1, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$5) \sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$6) \cos^2 x = \frac{\cot^2 x}{1 + \cot^2 x}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

1η εφαρμογή: Αν γνωρίζουμε έναν τριγωνομετρικό αριθμό μπορούμε να βρούμε τους άλλους 3.

πρ. 63

1. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \frac{9}{25} + \sin^2 x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin^2 x = \frac{16}{25} \text{ και επειδή } \frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \sin x < 0 \text{ οπότε}$$

$$\boxed{\sin x = -\frac{4}{5}}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}, \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{3}{4}$$

3. Αν $\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, να βρείτε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x rad.

$$\bullet \cot x \cdot \tan x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \cot x = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\frac{3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\bullet \sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{1}{1 + (-\sqrt{3})^2} = \frac{1}{1 + 3} = \frac{1}{4} = \frac{9}{12} \text{ δηλαδή}$$

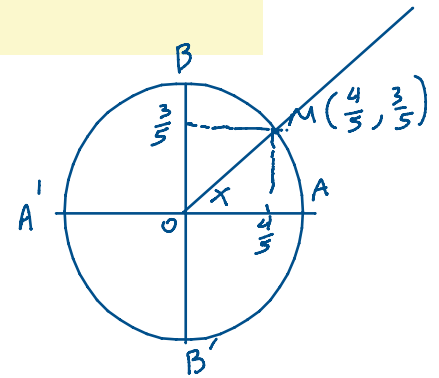
$$\begin{aligned} \bullet \cos^2 x &= \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{1}{1+\frac{3}{9}} = \frac{1}{\frac{12}{9}} = \frac{9}{12} \quad \text{δηλαδή} \\ \cos^2 x &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \quad \text{και επειδή} \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \Rightarrow \cos x > 0 \quad \text{οπότε} \\ &\boxed{\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cdot \cos x \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{6} \\ &\Rightarrow \boxed{\sin x = -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

6. Να εξετάσετε, αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες:

- Να ισχύει συγχρόνως $\sin x = 0$ και $\cos x = 0$.
- Να ισχύει συγχρόνως $\sin x = 1$ και $\cos x = 1$.
- Να ισχύει συγχρόνως $\sin x = \frac{3}{5}$ και $\cos x = \frac{4}{5}$.

i) $\sin x = 0 \Rightarrow$ τετλική ημιεφα OA ή OA'
 $\cos x = 0 \Rightarrow$ τετλική ημιεφα OB ή OB'
 Συγκεκριμένα δεν γίνεται $\sin x = \cos x = 0$



2ος τρόπος $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Αν $\sin x = \cos x = 0$ τότε $0^2 + 0^2 = 1$ Άρα όχι

ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 Αν $\sin x = \cos x = 1$ τότε $1^2 + 1^2 = 1$ Άρα όχι

iii) $\sin x = \frac{3}{5}$, $\cos x = \frac{4}{5}$
 $\sin^2 x + \cos^2 x = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$
 οπότε αν $M\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ τότε $OM = \sqrt{\left(\frac{4}{5} - 0\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 0\right)^2} = 1$
 οπότε M ανήκει στον μοναδιαίο κύκλο.

7. Να αποδείξετε ότι, τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου με $x = 3\sin\theta$ και $y = 3\eta\mu\theta$, είναι σημεία κύκλου $O(0,0)$ κέντρου και ακτίνας $\rho = 3$.

A.v.S.o. $OM = \rho = 3$

$$\begin{aligned} \text{Given } OM &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(3\cos\theta)^2 + (3\sin\theta)^2} = \sqrt{9\cos^2\theta + 9\sin^2\theta} = \\ &= \sqrt{9(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{9 \cdot 1} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

9. Αν είναι $x = r \eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\varphi$, $y = r \eta\mu\theta\eta\mu\varphi$ και $z = r \sigma\upsilon\nu\theta$, να δείξετε ότι $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (r \cdot \eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + (r \eta\mu\theta \eta\mu\varphi)^2 + (r \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \\ &= r^2 \eta\mu^2\theta \underbrace{\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi}_{=1} + r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= r^2 \eta\mu^2\theta (\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi) + r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta = \\ &= r^2 \eta\mu^2\theta \cdot 1 + r^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta = r^2 (\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) = r^2 \cdot 1 = r^2 \end{aligned}$$

10. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\eta\alpha} = \frac{1-\sigma\upsilon\eta\alpha}{\eta\mu\alpha} \quad \text{ii)} \sigma\upsilon\nu^4\alpha - \eta\mu^4\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1 .$$