

## Μάθημα 2ο - Αλγεβρική επίλυση συστήματος

### Μέθοδος της αντικατάστασης

#### Περιγραφή μεθόδου

1. Λύνουμε τη μία εξίσωση ( όποια θέλουμε) ως προς έναν άγνωστο ( όποιον θέλουμε ).
2. Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση τον έναν άγνωστο με ότι βρήκαμε στη σχέση (3) και προκύπτει μια εξίσωση με έναν άγνωστο .
3. Λύνουμε την εξίσωση αυτή και βρίσκουμε την τιμή του ενός αγνώστου
4. Αντικαθιστούμε την τιμή που βρήκαμε στην σχέση (3) και βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο .

#### Συμβουλές κατά την εφαρμογή της μεθόδου

1. Επιλέγουμε να λύνουμε ως προς τον άγνωστο εκείνον που έχει συντελεστή 1 ή -1 , γιατί διαφορετικά θα προκύψουν κλάσματα που δυσκολεύουν στις πράξεις .
2. Αν και οι δύο άγνωστοι έχουν και στις δύο εξισώσεις συντελεστή διαφορετικό του 1 ή -1 τότε η δημιουργία κλασμάτων είναι μάλλον αναπόφευκτη οπότε προτιμούμε άλλη μέθοδο .

**Άσκηση 1** Να λυθεί το σύστημα :  $\begin{cases} 2x + \psi = 5 \\ 3x - 2\psi = -3 \end{cases}$  (1) (2)

$$\begin{aligned} (1) &\rightarrow 2x + \psi = 5 \rightarrow \boxed{\psi = 5 - 2x} \quad (3) \\ (2) &\xrightarrow{(3)} 3x - 2(5 - 2x) = -3 \Leftrightarrow 3x - 10 + 4x = -3 \Leftrightarrow 7x = 7 \Leftrightarrow \boxed{x = 1} \\ &\text{και } (3) \rightarrow \psi = 5 - 2 \cdot 1 \Rightarrow \boxed{\psi = 3} \\ &\text{Λύση } (1, 3) \end{aligned}$$

## Μέθοδος αντιθέτων συντελεστών

### Περιγραφή μεθόδου

1. Πολλαπλασιάζουμε τις εξισώσεις του συστήματος με κατάλληλους αριθμούς ώστε αυτές που θα προκύψουν να έχουν αντίθετους συντελεστές στον έναν άγνωστο.
2. Προσθέτουμε τις δύο νέες εξισώσεις κατά μέλη και έτσι προκύπτει μια εξίσωση με έναν μόνο άγνωστο.
3. Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει και βρίσκουμε την τιμή του ενός αγνώστου.
4. Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρίσκουμε σε μία από τις δύο αρχικές εξισώσεις και βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου

### Συμβουλές κατά την εφαρμογή της μεθόδου

1. Πριν πολ/με τις εξισώσεις με κατάλληλους αριθμούς κοιτάμε μήπως τυχαίνει να έχουμε αντίθετους συντελεστές στον έναν από τους δύο αγνώστους.
2. Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι συντελεστές τότε διαλέγουμε τον άγνωστο του οποίου θα φτιάξουμε αντίθετους συντελεστές και βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των συντελεστών του στις δύο εξισώσεις. Πολ/με την κάθε εξίσωση με το πηλίκο του Ε.Κ.Π. διά του συντελεστή που έχει ο άγνωστος στην εξίσωση αυτή, βάζοντας και το κατάλληλο πρόσημο, ώστε οι συντελεστές που θα προκύψουν στις δύο εξισώσεις, να μην είναι ίδιοι αλλά αντίθετοι. Η διαδικασία μοιάζει με αυτήν που μετατρέπουμε ετερόνυμα κλάσματα σε ομώνυμα.
3. Όταν πολ/με μια εξίσωση με έναν αριθμό, πολ/με όλους τους όρους της και στα δύο μέλη.

**Άσκηση 2** Να λυθεί το σύστημα 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases} \cdot (-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 6y = -10 \\ 9x - 6y = 15 \end{cases} (+)$$
$$\begin{aligned} -4x + 9x + 6y - 6y &= -10 + 15 \\ 5x &= 5 \\ \boxed{x=1} \end{aligned}$$
$$\text{Για } x=1 \text{ έχω } 2 \cdot 1 - 3y = 5$$
$$\begin{aligned} -3y &= 3 \\ y &= -1 \end{aligned}$$
$$\text{Λύση } (1, -1)$$

**Θέμα 5ο** (σχολικό βιβλίο 3η Α' ομάδας)

Να λυθεί το σύστημα :

$$\begin{cases} \frac{x-5}{2} + \frac{2y+1}{7} + 2 = 0 \\ \frac{x+6}{3} - \frac{y-6}{2} = 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 14 \cdot \frac{x-5}{2} + 14 \cdot \frac{2y+1}{7} + 14 \cdot 2 &= 0 & 6 \cdot \frac{x+6}{3} - 6 \cdot \frac{y-6}{2} &= 6 \cdot 8 \\ 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 &= 0 & 2(x+6) - 3(y-6) &= 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7(x-5) + 2(2y+1) + 28 &= 0 \\ 7x - 35 + 4y + 2 + 28 &= 0 \\ \boxed{7x + 4y} &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(x+6) - 3(y-6) &= 48 \\ 2x + 12 - 3y + 18 &= 48 \\ \boxed{2x - 3y} &= 18 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 7x + 4y = 5 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases} \begin{matrix} \cdot 3 \\ \cdot 4 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 21x + 12y = 15 \\ 8x - 12y = 72 \end{cases} (+)$$

$$\hline 29x = 87$$

$$\boxed{x=3} \quad \text{και} \quad 7 \cdot 3 + 4y = 5$$

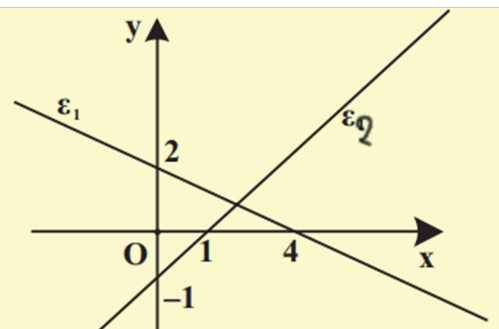
$$4y = -16$$

$$\boxed{y=-4}$$

Λύση (3, -4)

**Θέμα 6ο** (σχολικό βιβλίο 1 Β' ομάδας)

- i) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  του διπλανού σχήματος.  
 ii) Ποιο σύστημα ορίζουν οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και ποια είναι η λύση του συστήματος;



$$\varepsilon_1: y = ax + b$$

$$(0, 2) \in \varepsilon_1 \Rightarrow 2 = a \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b=2}$$

$$(4, 0) \in \varepsilon_1 \Rightarrow 0 = 4a + b \Rightarrow 0 = 4a + 2 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}}$$

$$\text{Άρα } (\varepsilon_1): y = -\frac{1}{2}x + 2$$

$$\varepsilon_2: y = ax + b$$

$$(1, 0) \in \varepsilon_2 \Rightarrow \boxed{0 = a + b} \quad (1)$$

$$(2) \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$(0, -1) \in \varepsilon_2 \Rightarrow -1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow \boxed{b = -1} \quad (2)$$

$$(0, -1) \in \varepsilon_2 \Rightarrow -1 = a \cdot 0 + b \Rightarrow \underline{b = -1} \quad (2)$$

$$\text{Άρα } \boxed{\varepsilon_2: y = x - 1}$$

$$\text{Το ζητούμενο } (\varepsilon): \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 2 \\ y = x - 1 \end{cases} \quad \text{οπότε}$$

$$-\frac{1}{2}x + 2 = x - 1$$

$$-x + 4 = 2x - 2$$

$$-x - 2x = -4 - 2$$

$$-3x = -6$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\text{Άρα } (2, 1)$$

και

$$\boxed{\begin{matrix} y = 2 - 1 \\ y = 1 \end{matrix}}$$

**Θέμα 7ο** (σχολικό βιβλίο 6 Β' ομάδας)

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1: 2x + 4y = 3$  και  $\varepsilon_2: x + 2y = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

- Να βρείτε τους συντελεστές διεύθυνσης των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Υπάρχουν τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  για τις οποίες οι ευθείες τέμνονται;
- Για ποιες τιμές της παραμέτρου  $\alpha$  οι ευθείες είναι παράλληλες;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1: 2x + 4y &= 3 \\ 4y &= -2x + 3 \\ y &= \frac{-2x}{4} + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$$

$$\boxed{\alpha_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2: x + 2y &= \alpha \\ 2y &= -x + \alpha \\ y &= -\frac{1}{2}x + \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha_2 = -\frac{1}{2}}$$

Άρα  $\alpha_1 = \alpha_2$   
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  δεν  
τέμνονται

$$\varepsilon_1: 2x + 4y = 3$$

$$\varepsilon_2: 2x + 4y = 2\alpha$$

$$\text{Αν } 2\alpha = 3 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2} \quad \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$$

$$\text{Αν } 2\alpha \neq 3 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{3}{2} \quad \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$$